Matemáticas

1.º ESO

Apuntes de clase

Samuel Ambrosino Tejel

www.samuelambrosino.com

Curso 2025–2026

Índice

Tema 1. Números Naturales y Sistemas de Numeración

Los **números naturales** son los números que usamos para contar: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Son infinitos: siempre podemos sumarle 1 al número más grande que imaginemos.

1.1 El sistema de numeración decimal

El sistema que usamos hoy en todo el mundo es el **sistema decimal**, que se llama así porque usa exactamente **10 dígitos** diferentes: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Con solo esos diez símbolos somos capaces de escribir cualquier número, por grande que sea. El truco es que el valor de cada cifra *depende de la posición* que ocupa: el dígito 3 vale 3 en el número 53, pero vale 3000 en el número 3241.

Definición 1.1: Sistema posicional

En el sistema decimal, el valor de cada cifra depende de la **posición** que ocupa dentro del número. Cada posición vale **10 veces más** que la posición inmediata a su derecha.

Posición (de dcha. a izda.)	Nombre	Valor
1.ª	Unidades	1
2.ª	Decenas	10
3.ª	Centenas	100
4.ª	Unidades de millar	1000
5.ª	Decenas de millar	10000
6.ª	Centenas de millar	100000
7.ª	Millones	1000000

La **descomposición polinómica** consiste en escribir un número como suma de cada cifra multiplicada por su valor posicional. Es la forma de "explicar" un número posición a posición.

Ejemplo 1.1: Valor posicional y descomposición de 35274

¿Qué valor tiene cada cifra en el número 35274?

D. millar	U. millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	5	2	7	4
$3 \cdot 10000$	$5 \cdot 1000$	$2 \cdot 100$	$7 \cdot 10$	$4 \cdot 1$
30000	5000	200	70	4

Descomposición polinómica:

$$35274 = 3 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4$$

Ejemplo 1.2: Leer y escribir números grandes

El número 4060305 se lee: *cuatro millones sesenta mil trescientos cinco.*
El dígito 0 indica que no hay ninguna unidad en esa posición, pero no se puede omitir al escribir el número: sin él tendríamos un número completamente diferente.

Ahora al revés: ¿cómo se lee 2305070? Separamos en grupos de tres desde la derecha: 2 | 305 | 070. Se lee: *dos millones trescientos cinco mil setenta.*

> **Nota**
>
> Para leer un número grande, sepáralo en grupos de tres cifras empezando por la derecha. En España se usa un espacio (o a veces un punto) para separar los grupos: 1234567. La coma se reserva para separar la parte entera de los decimales, así que **nunca** se escribe $1,234,567$ para un número entero.

Inténtalo tú

1. Indica el valor posicional de la cifra 7 en cada número: 7432; 38710; 5007; 700000; 7000000.
2. Escribe la descomposición polinómica de: 4506; 83020; 305614.
3. ¿Qué número corresponde a la descomposición $5 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9$?
4. Escribe en cifras: *doscientos cuatro mil setenta y dos*; *dos millones cuatrocientos mil cincuenta y uno*.
5. Ordena de menor a mayor: 89999; 90001; 9999; 100000; 90000.
6. ¿Cuántas veces más vale el primer 5 que el segundo en el número 55000?

1.2 Operaciones con números naturales

Las cuatro operaciones básicas con números naturales son la **suma**, la **resta**, la **multiplicación** y la **división**.

Suma: sumamos cifra a cifra, de derecha a izquierda. Cuando el resultado de una columna es ≥ 10, escribimos solo las unidades y *llevamos* el resto a la columna siguiente.

Resta: restamos cifra a cifra, de derecha a izquierda. Si la cifra de arriba es menor que la de abajo, *tomamos prestado* una unidad de la columna siguiente (que equivale a 10 en la columna actual).

Multiplicación: multiplicamos el multiplicando por cada cifra del multiplicador, desplazando una posición a la izquierda por cada fila, y luego sumamos todos los productos parciales.

División: buscamos cuántas veces cabe el divisor en el dividendo. Lo que sobra al final se llama **resto** y siempre es *menor* que el divisor. La relación fundamental entre las partes de una división es:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}\,, \qquad 0 \leq \text{resto} < \text{divisor}.$$

Ejemplo 1.3: Suma y resta con llevadas

Suma: $4758 + 2643$

- Unidades: $8 + 3 = 11 \;\rightarrow$ escribimos 1, llevamos 1.
- Decenas: $5 + 4 + 1 = 10 \;\rightarrow$ escribimos 0, llevamos 1.
- Centenas: $7 + 6 + 1 = 14 \;\rightarrow$ escribimos 4, llevamos 1.
- Millares: $4 + 2 + 1 = 7 \;\rightarrow$ escribimos 7.

Resultado: **7401**.

Resta: $8300 - 3456$
La cifra de las unidades es $0 < 6$, así que tomamos prestado de las decenas (que también es 0, así que subimos a las centenas). Con las prestadas: $10 - 6 = 4$ en unidades, etc.
Resultado: **4844**. Comprobación: $4844 + 3456 = 8300$ ✓

Ejemplo 1.4: Multiplicación y división con resto

Multiplicación: 346×27

- $346 \times 7 = 2422$ (primera fila, empezando por unidades)
- $346 \times 20 = 6920$ (segunda fila, desplazada una posición a la izda.)
- Suma: $2422 + 6920 = \mathbf{9342}$

División con resto: $2573 \div 8$
Dividimos paso a paso: $25 \div 8 = 3$ (resto 1); bajamos 7: $17 \div 8 = 2$ (resto 1); bajamos 3: $13 \div 8 = 1$ (resto 5).
Cociente $= 321$, resto $= 5$.
Comprobación: $8 \times 321 + 5 = 2568 + 5 = 2573$ ✓

Nota

El resto de una división es siempre **estrictamente menor** que el divisor. Si al terminar el resto es mayor o igual que el divisor, el cociente todavía puede aumentar. Cuando el resto es 0, decimos que la división es **exacta**.

Inténtalo tú

1. Calcula: $3847 + 5269$; $12000 - 4385$; $7003 - 2468$.
2. Calcula: 485×36; 724×58; 307×45.
3. Calcula el cociente y el resto de: $2573 \div 8$; $1750 \div 24$; $4003 \div 17$.
4. Comprueba las tres divisiones del ejercicio anterior usando $D = d \cdot c + r$.
5. Un granjero recoge 3450 naranjas y las empaqueta en cajas de 12. ¿Cuántas cajas completas llena? ¿Cuántas naranjas sobran?
6. Halla el número que, multiplicado por 34, da 2686.

1.3 Jerarquía de operaciones

Cuando una expresión tiene varias operaciones a la vez, es imprescindible ponerse de acuerdo en el orden de resolución para que todo el mundo obtenga el mismo resultado. Por ejemplo, en $2 + 3 \cdot 4$: si multiplicamos primero obtenemos $2 + 12 = 14$, pero si sumamos primero obtenemos $5 \cdot 4 = 20$. ¡Dos respuestas distintas! Para evitar esta ambigüedad existe el siguiente acuerdo universal.

Definición 1.2: Orden de operaciones (jerarquía)

1. Se resuelve primero lo que está entre **paréntesis** ( ), corchetes [ ] o llaves { }, empezando siempre por la expresión más interior.
2. Después, **potencias y raíces**.
3. Después, **multiplicaciones y divisiones**, de izquierda a derecha.
4. Por último, **sumas y restas**, de izquierda a derecha.

Ejemplo 1.5: Jerarquía sin paréntesis

Calcula $3 + 4 \times 2 - (5 - 1)$.

1. **Paréntesis:** $5 - 1 = 4$. Queda: $3 + 4 \times 2 - 4$.
2. **Multiplicación:** $4 \times 2 = 8$. Queda: $3 + 8 - 4$.
3. **Suma y resta (izq. a dcha.):** $3 + 8 - 4 = 11 - 4 = 7$.

Resultado: **7**.
Error frecuente: hacer $3 + 4 = 7$ y luego $7 \times 2 = 14$. ¡Siempre se multiplica antes que se suma!

Ejemplo 1.6: Jerarquía con potencias y paréntesis dobles

Calcula $2^3 + 6 \div (1 + 2) - 1$.

1. **Paréntesis:** $(1 + 2) = 3$. Queda: $2^3 + 6 \div 3 - 1$.
2. **Potencia:** $2^3 = 8$. Queda: $8 + 6 \div 3 - 1$.
3. **División:** $6 \div 3 = 2$. Queda: $8 + 2 - 1$.
4. **Suma y resta:** $8 + 2 - 1 = 9$.

Resultado: **9**.

Otro ejemplo con corchetes: $[3 \times (5 - 2) + 1] \div 5$

1. Paréntesis interior: $(5 - 2) = 3$. Queda: $[3 \times 3 + 1] \div 5$.
2. Dentro del corchete, multiplicación primero: $3 \times 3 = 9$. Queda: $[9 + 1] \div 5$.
3. Corchete (suma): $9 + 1 = 10$. Queda: $10 \div 5$.
4. División: $10 \div 5 = \mathbf{2}$.

Nota

Cuando hay dos operaciones del mismo nivel (dos sumas, o una suma y una resta), se resuelven siempre **de izquierda a derecha**: $10 - 3 + 2 = 7 + 2 = 9$ (no $10 - 5 = 5$).

Inténtalo tú

1. Calcula: $5 + 3 \times 4$; $20 - 2 \times (3 + 1)$; $18 \div (2 + 1) + 5$.
2. Calcula: $2^2 + 3 \times 5 - 10 \div 2$; $(4 + 6) \div 5 + 3^2$.
3. Calcula: $[3 \times (5 - 2) + 1] \div 5$; $4 + 2 \times [9 - (3 + 1)]$.
4. Coloca paréntesis para que sea verdad: $3 + 4 \times 2 = 14$; $10 - 4 \div 2 = 3$.
5. ¿Es lo mismo $24 \div 4 \div 2$ que $24 \div (4 \div 2)$? Calcula los dos y compara.
6. Calcula: $50 \div (10 - 5) \times 2 + 3 \times (8 - 6)$.

1.4 El sistema de numeración romano

Los romanos usaban un sistema **no posicional**: el valor de cada símbolo es siempre el mismo, independientemente de su posición (excepto cuando actúa la regla sustractiva). Hoy los vemos en relojes, siglos (siglo XXI), nombres de reyes o papas, y eventos olímpicos.

Definición 1.3: Símbolos y reglas romanas

Los siete símbolos básicos son:

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1000

Regla aditiva: si los símbolos van de mayor a menor (o igual), se suman.
$\text{VI} = 5 + 1 = 6$; $\text{XII} = 10 + 1 + 1 = 12$; $\text{LXIII} = 50 + 10 + 3 = 63$.

Regla sustractiva: si una letra de *menor* valor aparece *a la izquierda* de una mayor, se **resta**. Solo son válidas estas seis combinaciones:

$$\text{IV} = 4, \quad \text{IX} = 9, \quad \text{XL} = 40, \quad \text{XC} = 90, \quad \text{CD} = 400, \quad \text{CM} = 900.$$

Límite de repetición: ningún símbolo puede repetirse más de **3** veces seguidas. Por eso el 4 no se escribe IIII sino IV. Solo se restan I, X y C (nunca V, L ni D).

Ejemplo 1.7: De romano a decimal

Convierte MCMXLVII al sistema decimal.
Identificamos los pares sustractivos de izquierda a derecha:

- $\text{M} \to 1000$
- $\text{CM} \to 900$ (C antes de M: $1000 - 100 = 900$)
- $\text{XL} \to 40$ (X antes de L: $50 - 10 = 40$)
- $\text{V} \to 5$
- $\text{II} \to 1 + 1 = 2$

Suma total: $1000 + 900 + 40 + 5 + 2 = \mathbf{1947}$.

Ejemplo 1.8: De decimal a romano

Escribe 2024 en números romanos.
Descomponemos usando los valores romanos de mayor a menor:

$$2024 = 2000 + 24 = 2000 + 20 + 4$$

$$\text{MM} + \text{XX} + \text{IV} = \textbf{MMXXIV}$$

(Este fue el número romano del año 2024, ¡apareció en los Juegos Olímpicos de París!)

Convierte 1999:

$$1999 = 1000 + 900 + 90 + 9 \ \to\ \text{M} + \text{CM} + \text{XC} + \text{IX} = \textbf{MCMXCIX}$$

Nota

El sistema romano no tiene cero ni números negativos, y es muy incómodo para hacer cálculos. Por eso fue sustituido por el sistema decimal en casi todos los usos prácticos.

Inténtalo tú

1. Escribe en decimal: XIV; XXXIX; CDXLVIII; MCMXCIX; MMMDCCCLXXXVIII.
2. Escribe en romano: 14; 49; 399; 1999; 2025.
3. ¿En qué año estamos? Escríbelo en romano.
4. En un libro, el capítulo XXIV es el número 24. ¿Qué capítulo es el LX? ¿Y el XCIX?
5. El rey Juan Carlos I nació en 1938 y el rey Felipe VI en 1968. Escríbelo en romano.
6. ¿Por qué no existe el número 0 en el sistema romano? ¿Qué consecuencias tiene esto?

Tema 2. Potencias y Raíces

2.1 Potencias de números naturales

Multiplicar un número varias veces por sí mismo es algo que ocurre muy a menudo en matemáticas. En lugar de escribir $3 \times 3 \times 3 \times 3$, usamos una **potencia** como notación abreviada: 3^4. Esto hace los cálculos mucho más compactos y claros.

Definición 2.1: Potencia

La **potencia** a^n significa multiplicar el número a por sí mismo n veces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

El número a se llama **base** y el número n se llama **exponente**.

Se lee: "a elevado a n". En particular, a^2 se lee "a al cuadrado" y a^3 se lee "a al cubo".

Casos especiales:

- $a^1 = a$ (cualquier número elevado a 1 es él mismo).
- $a^0 = 1$ (cualquier número distinto de cero elevado a 0 vale 1).
- $1^n = 1$ (el 1 elevado a cualquier exponente sigue siendo 1).
- $0^n = 0$ para $n > 0$.

Los **números cuadrados perfectos** son los que resultan de elevar un natural al cuadrado: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, \ldots$

Los **números cúbicos perfectos** son los que resultan de elevar un natural al cubo: $1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots$

Ejemplo 2.1: Calcular potencias

- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$ ("dos a la quinta" vale 32)
- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$
- $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$
- $5^0 = 1.$ (regla especial del exponente cero)
- $7^1 = 7.$ (exponente uno: el número no cambia)

Ejemplo 2.2: Potencias de 10

Las potencias de 10 tienen una forma muy especial: el resultado es un 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente.

- $10^1 = 10$ (un cero)
- $10^2 = 100$ (dos ceros)
- $10^3 = 1000$ (tres ceros)
- $10^6 = 1000000$ (un millón: seis ceros)

Estas potencias son la base del sistema decimal, ¡por eso el tema 1 está tan relacionado con ellas!

Nota

No confundas $2^3 = 8$ con $2 \times 3 = 6$. La potencia es multiplicación repetida, no multiplicación simple. Y no confundas la base con el exponente: $2^3 \neq 3^2$ ya que $8 \neq 9$.

Inténtalo tú

1. Calcula: 4^3; 2^7; 5^4; 10^5; 6^2; 3^0.
2. Escribe como potencia: $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$; $7 \cdot 7 \cdot 7$; $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.
3. ¿Cuánto vale 1^{100}? ¿Y 100^1? ¿Y 100^0?
4. Escribe los seis primeros números cuadrados perfectos y los cuatro primeros números cúbicos perfectos.
5. ¿Es mayor 3^4 o 4^3? Calcula los dos y compara.

2.2 Propiedades de las potencias

Las potencias cumplen una serie de **propiedades** que permiten simplificar cálculos sin tener que multiplicar todo. Hay que conocerlas bien porque se usan constantemente. En cada propiedad, a es cualquier número natural distinto de cero, y m, n son exponentes naturales.

Definición 2.2: Propiedades de las potencias

- **Producto de potencias de igual base:** se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- **Cociente de potencias de igual base:** se restan los exponentes (con $m > n$).

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

- **Potencia de una potencia:** se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- **Potencia de un producto:** se distribuye el exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo 2.3: Aplicar las propiedades de las potencias

Producto de igual base:

$$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$$

Comprobación directa: $3^4 = 81,\ 3^2 = 9,\ 81 \times 9 = 729$ ✓

Cociente de igual base:

$$5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4 = 625$$

Importante: la base debe ser la misma. No podemos aplicar esta regla a $5^7 \div 3^3$.

Potencia de una potencia:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$$

Potencia de un producto:

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$$

Comprobación: $(2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$ ✓

Nota

Las propiedades solo funcionan cuando las bases son iguales (para producto y cociente). $2^3 \cdot 5^3 \neq 10^6$: aquí las bases son distintas, pero como el exponente es el mismo, sí podemos agrupar: $(2 \cdot 5)^3 = 10^3$.

Inténtalo tú

1. Simplifica usando propiedades: $2^5 \cdot 2^3$; $7^8 \div 7^5$; $(3^2)^4$.
2. Simplifica: $5^3 \cdot 5^0$; $\left(4^3\right)^2$; $6^{10} \div 6^7$.
3. Calcula sin usar calculadora: $(2 \cdot 5)^4$; $(3 \cdot 4)^2$; $(10^2)^3$.
4. ¿Cuánto vale $\dfrac{10^8}{10^5}$? ¿Y $10^3 \cdot 10^4$?
5. Escribe 4^6 como una potencia de 2. *Ayuda:* $4 = 2^2$.
6. Decide si es verdad o mentira y explica por qué: $3^2 \cdot 4^2 = 12^2$.

2.3 Notación científica

Los científicos y los ingenieros trabajan con números enormes (la distancia de la Tierra al Sol es 149600000000 metros) o con números muy pequeños (el diámetro de un átomo de hidrógeno es aproximadamente 0.0000000001 metros). Escribir tantos ceros es lento y propenso a errores. La **notación científica** resuelve este problema usando potencias de 10.

Definición 2.3: Notación científica

Un número está en **notación científica** cuando se escribe de la forma:

$$a \times 10^n$$

donde a es un número con **una sola cifra antes de la coma** (es decir, $1 \leq a < 10$) y n es un número entero (puede ser positivo, negativo o cero).

¿Cómo pasar un número grande a notación científica? Desplaza la coma hacia la izquierda hasta que quede solo una cifra antes de ella. Cada posición desplazada corresponde a una potencia de 10 positiva.

¿Cómo pasar un número pequeño (con muchos ceros al principio) a notación científica? Desplaza la coma hacia la derecha hasta encontrar la primera cifra distinta de cero. El exponente será negativo (esto es un adelanto de los temas de números enteros).

Ejemplo 2.4: Números grandes a notación científica

Convierte 3500000 a notación científica.

1. Buscamos dónde poner la coma para que quede una cifra antes: 3.5.
2. Contamos cuántos lugares se ha movido la coma: desde 3500000 hasta 3.5 son 6 posiciones hacia la izquierda.
3. Resultado: 3.5×10^6.

Otros ejemplos:

- $149600000000 = 1.496 \times 10^{11}$ (distancia Tierra-Sol en metros)
- $57000 = 5.7 \times 10^4$
- $8000000000 = 8 \times 10^9$

Ejemplo 2.5: De notación científica a número ordinario

Convierte 2.34×10^5 al número ordinario.
El exponente 5 indica que debemos mover la coma 5 posiciones a la derecha:

$$2.34 \times 10^5 = 234000$$

Convierte 4.5×10^{-5} al número ordinario. *(Exponente negativo: movemos la coma a la izquierda.)*

$$4.5 \times 10^{-5} = 0.000045$$

El exponente -5 nos dice que hay 5 posiciones de ceros a la izquierda antes de la cifra significativa.

Nota

Para verificar que un número está correctamente en notación científica, comprueba que la cifra antes de la coma es siempre uno solo de los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Si obtienes 12×10^3, eso no es notación científica; debes escribirlo 1.2×10^4.

Inténtalo tú

1. Escribe en notación científica: 47000; 3800000; 560000000.
2. Escribe en notación científica: 0.0072; 0.000045; 0.0000001.
3. Pasa a número ordinario: 6.3×10^4; 2.05×10^7; 1.2×10^{-3}.
4. La velocidad de la luz es 300000000 metros por segundo. Escríbela en notación científica.
5. ¿Cuál es mayor, 3.2×10^6 o 9.9×10^5? Explica tu respuesta.
6. Ordena de menor a mayor: 4.1×10^3; 3×10^4; 8.9×10^2.

2.4 Raíces cuadradas y cúbicas

La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado. Si $4^2 = 16$, entonces $\sqrt{16} = 4$. Es como preguntarse: “¿qué número, multiplicado por sí mismo, da este resultado?”

Definición 2.4: Raíz cuadrada

La **raíz cuadrada** de un número a (con $a \geq 0$) es el número $r \geq 0$ tal que $r^2 = a$. Se escribe $\sqrt{a} = r$.
Si r es un número natural, decimos que la raíz es **exacta** y que a es un **cuadrado perfecto**. Si no es exacta, el resultado es un número con decimales infinitos que aproximaremos.

Los cuadrados perfectos hasta 100 son:

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$

La **raíz cúbica** es la operación inversa de elevar al cubo: si $3^3 = 27$, entonces $\sqrt[3]{27} = 3$. En general, $\sqrt[3]{a} = r$ significa que $r^3 = a$.

Ejemplo 2.6: Raíces cuadradas exactas y aproximadas

Raíz exacta: $\sqrt{49}$
Buscamos qué número al cuadrado da 49: $7^2 = 49$, así que $\sqrt{49} = \mathbf{7}$.

Raíz exacta: $\sqrt{144}$
$12^2 = 144$, así que $\sqrt{144} = \mathbf{12}$.

Raíz aproximada: $\sqrt{20}$
$4^2 = 16 < 20 < 25 = 5^2$, por tanto $\sqrt{20}$ está entre 4 y 5. Está más cerca de 5 que de 4, así que $\sqrt{20} \approx 4.5$. (El valor exacto es $4.472\ldots$)

Ejemplo 2.7: Raíces cúbicas y aplicación

Raíz cúbica: $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$. $\sqrt[3]{125} = 5$, porque $5^3 = 125$.

Aplicación: Una caja cúbica tiene un volumen de $64\,\text{cm}^3$. ¿Cuánto mide cada arista?
Buscamos l tal que $l^3 = 64$. Como $4^3 = 64$, la arista mide $\sqrt[3]{64} = \mathbf{4}\,\text{cm}$.

Nota

La raíz cuadrada de un número negativo no existe en los números naturales (ni en los reales), porque ningún número al cuadrado da un resultado negativo. En cambio, la raíz cúbica sí puede aplicarse a negativos (tema de cursos superiores).

Inténtalo tú

1. Calcula: $\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{400}$.
2. Calcula: $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{1000}$.
3. Entre qué dos números naturales consecutivos está $\sqrt{50}$? ¿Y $\sqrt{90}$?
4. Un cuadrado tiene un área de $256\,\text{cm}^2$. ¿Cuánto mide su lado?
5. Comprueba si $\sqrt{36} + \sqrt{64} = \sqrt{36 + 64}$ es verdad o mentira calculando los dos miembros.
6. Ordena de menor a mayor: $\sqrt{30}$; 5; $\sqrt{26}$; 6. *Ayuda: recuerda que* $5^2 = 25$ *y* $6^2 = 36$.

Tema 3. Divisibilidad

La **divisibilidad** estudia cuándo un número puede dividir a otro sin dejar resto. Estas ideas son fundamentales para simplificar fracciones, encontrar mínimos comunes múltiplos y resolver muchos problemas cotidianos.

3.1 Divisores y múltiplos

Cuando dividimos 12 entre 4 obtenemos cociente 3 y resto 0: la división es exacta. En ese caso decimos que 4 **divide** a 12, o que 4 es un **divisor** de 12, o que 12 es un **múltiplo** de 4.

Definición 3.1: Divisor y múltiplo

Decimos que b **divide** a a (y escribimos $b \mid a$) cuando la división $a \div b$ es exacta, es decir, cuando el resto es 0. En ese caso:

- b es un **divisor** de a.
- a es un **múltiplo** de b.

Propiedades básicas:

- El 1 divide a todos los números ($1 \mid a$ para cualquier a).
- Todo número se divide a sí mismo ($a \mid a$).
- El 0 es múltiplo de todos los números.

¿Cómo encontrar todos los divisores de un número? Probamos a dividir el número entre $1, 2, 3, \ldots$ hasta llegar a la mitad del número. Si la división es exacta, ese número es divisor. Los divisores siempre van en parejas.

Los **múltiplos** de un número se obtienen multiplicando ese número por $1, 2, 3, 4, \ldots$ Son infinitos.

Ejemplo 3.1: Divisores de un número

Halla todos los divisores de 24.
Probamos divisiones exactas:

- $24 \div 1 = 24$ (exacta) $\rightarrow$ 1 y 24 son divisores.
- $24 \div 2 = 12$ (exacta) $\rightarrow$ 2 y 12 son divisores.
- $24 \div 3 = 8$ (exacta) $\rightarrow$ 3 y 8 son divisores.
- $24 \div 4 = 6$ (exacta) $\rightarrow$ 4 y 6 son divisores.
- $24 \div 5 = 4$ resto 4 (no exacta) $\rightarrow$ 5 no es divisor.

A partir de aquí los divisores ya se repiten, así que paramos.
Los divisores de 24 son: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (en total, 8 divisores).

Ejemplo 3.2: Múltiplos de un número

Escribe los diez primeros múltiplos de 7.
Los multiplicamos por $1, 2, 3, \ldots, 10$:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70$$

Observa que los múltiplos de un número forman una **sucesión aritmética**: cada término se obtiene sumando 7 al anterior.

Nota

Para comprobar si b es divisor de a, simplemente divide a entre b y comprueba si el resto es 0. Si el resultado de la división es exacto, b divide a a.

Inténtalo tú

1. Halla todos los divisores de: 18; 30; 36; 100.
2. Escribe los ocho primeros múltiplos de: 4; 9; 11; 25.
3. ¿Es 7 divisor de 91? ¿Es 6 divisor de 50? Justifica tu respuesta.
4. ¿Cuáles de estos números son múltiplos de 8?: 40; 52; 64; 78; 96.
5. Un número tiene exactamente 3 divisores. ¿Qué forma tiene ese número? *Ayuda: busca ejemplos con* 4, 9, 25*...*
6. En una fiesta hay 48 personas. ¿De qué formas se pueden repartir en grupos iguales? (Cada divisor de 48 es una posibilidad.)

3.2 Criterios de divisibilidad

En muchos casos podemos saber si un número es divisible por otro *sin hacer la división*. Los **criterios de divisibilidad** son reglas rápidas que nos permiten decidirlo mirando las cifras del número.

Definición 3.2: Criterios de divisibilidad

- **Entre 2:** el número termina en cifra par (0, 2, 4, 6 u 8).
- **Entre 3:** la suma de sus cifras es divisible entre 3.
- **Entre 5:** el número termina en 0 o en 5.
- **Entre 9:** la suma de sus cifras es divisible entre 9.
- **Entre 10:** el número termina en 0.
- **Entre 11 (avanzado):** la diferencia entre la suma de las cifras en posición impar y la suma de las cifras en posición par es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo 3.3: Aplicar los criterios a un número

Analiza la divisibilidad de 360 entre 2, 3, 5, 9 y 10.

- **Entre 2:** termina en 0, que es par. **Sí** es divisible.
- **Entre 3:** $3 + 6 + 0 = 9$, que es divisible entre 3. **Sí** es divisible.
- **Entre 5:** termina en 0. **Sí** es divisible.
- **Entre 9:** $3 + 6 + 0 = 9$, divisible entre 9. **Sí** es divisible.
- **Entre 10:** termina en 0. **Sí** es divisible.

360 es divisible entre 2, 3, 5, 9 y 10. Tiene muchos divisores, ¡es un número muy redondo!

Ejemplo 3.4: Criterio de divisibilidad entre 11

¿Es 1364 divisible entre 11?
Numeramos las cifras desde la derecha: 4 (pos. 1, impar), 6 (pos. 2, par), 3 (pos. 3, impar), 1 (pos. 4, par).

- Suma de posiciones impares: $4+3=7$.
- Suma de posiciones pares: $6+1=7$.
- Diferencia: $7-7=0$, que es múltiplo de 11.

Por tanto, 1364 **sí** es divisible entre 11. Comprobación: $1364 \div 11 = 124$ ✓

Nota

Los criterios de divisibilidad entre 2 y entre 3 se pueden combinar: si un número es divisible entre 2 y entre 3 a la vez, también es divisible entre 6. De forma similar, divisible entre 2 y 4 a la vez implica divisible entre 8 (en algunos casos).

Inténtalo tú

1. Aplica todos los criterios $(2,3,5,9,10)$ a los números: 135; 720; 1234; 4095.
2. ¿Cuáles de estos números son divisibles entre 6? $(6 = 2 \times 3)$: 48; 74; 126; 315.
3. Encuentra el mayor número de tres cifras divisible entre 9.
4. ¿Es 2673 divisible entre 3? ¿Y entre 9? Justifícalo sin dividir.
5. Comprueba con el criterio del 11 si 506 es divisible entre 11. Luego verifica con la división.
6. Un número de cuatro cifras termina en 0 y la suma de sus cifras es 12. ¿Es divisible entre 2? ¿Entre 3? ¿Entre 5? ¿Entre 9? ¿Entre 10?

3.3 Números primos y compuestos

Una forma natural de clasificar los números es según cuántos divisores tienen. Los **números primos** son los más especiales: son los "átomos" de los naturales, porque con ellos se construyen todos los demás.

Definición 3.3: Primos y compuestos

- Un número $p > 1$ es **primo** si sus únicos divisores son 1 y él mismo.
- Un número $n > 1$ es **compuesto** si tiene algún divisor además de 1 y sí mismo.
- El número 1 **no es primo ni compuesto**: es un caso especial.

Los números primos menores que 50 son:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47$$

El 2 es el único primo par. Todos los demás primos son impares.

Descomposición en factores primos: Todo número compuesto puede escribirse como **producto de números primos**. Para encontrarlo usamos el *árbol de factores* o el *método de divisiones sucesivas*: dividimos el número entre el primo más pequeño que lo divida, luego repetimos con el cociente, hasta llegar a 1.

Ejemplo 3.5: Descomposición en factores primos — método de divisiones

Descompón 360 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Leemos los divisores de arriba a abajo: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Comprobación: $8 \times 9 \times 5 = 72 \times 5 = 360$ ✓

Ejemplo 3.6: Descomposición en factores primos — otro ejemplo

Descompón 180 y 252 en factores primos.

Para 180:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Para 252:

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Nota

La descomposición en factores primos de un número es **única** (salvo el orden de los factores). Esto quiere decir que no importa por qué primo empieces: siempre llegarás al mismo resultado. Este resultado se llama **Teorema Fundamental de la Aritmética**.

Inténtalo tú

1. ¿Cuáles de estos números son primos? 27; 31; 51; 53; 91; 97.
2. Descompón en factores primos: 60; 84; 120; 500.
3. ¿Cuántos divisores tiene $2^3 \cdot 3^2$? *Ayuda: cada divisor tiene la forma* $2^a \cdot 3^b$ *con* $0 \leq a \leq 3$ *y* $0 \leq b \leq 2$.
4. Encuentra todos los primos entre 40 y 60.
5. Escribe 48 de tres formas distintas como producto de dos factores. ¿En cuál de ellas ambos factores son primos?
6. Una clase tiene 30 alumnos. El profesor quiere dividirlos en grupos iguales. ¿Cuántas formas distintas hay? Usa la descomposición de 30.

3.4 MCD y MCM

El **máximo común divisor** y el **mínimo común múltiplo** son dos conceptos fundamentales que aparecen en la simplificación de fracciones y en muchos problemas prácticos. Para calcularlos siempre empezamos por la descomposición en factores primos.

Definición 3.4: MCD y MCM

Dados dos números a y b:

El $\text{mcd}(a, b)$ (**máximo común divisor**) es el mayor número que divide exactamente a los dos. Se calcula tomando los **factores comunes** con el **menor** exponente.

El $\text{mcm}(a, b)$ (**mínimo común múltiplo**) es el menor número positivo que es múltiplo de los dos. Se calcula tomando **todos los factores** (comunes y no comunes) con el **mayor** exponente.

Ejemplo 3.7: Calcular MCD y MCM de 12 y 18

Paso 1 — Descomponemos en factores primos:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2$$

Paso 2 — MCD: factores comunes con menor exponente. Los factores que aparecen en los dos son 2 y 3.

- El 2 aparece con exponente 2 en 12 y con exponente 1 en 18 $\rightarrow$ tomamos 2^1.
- El 3 aparece con exponente 1 en 12 y con exponente 2 en 18 $\rightarrow$ tomamos 3^1.

$$\text{mcd}(12, 18) = 2^1 \cdot 3^1 = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$$

Paso 3 — MCM: todos los factores con mayor exponente.

- El 2 tiene exponente 2 en 12 y 1 en 18 $\rightarrow$ tomamos 2^2.
- El 3 tiene exponente 1 en 12 y 2 en 18 $\rightarrow$ tomamos 3^2.

$$\text{mcm}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \mathbf{36}$$

Comprobación: $\text{mcd} \times \text{mcm} = 6 \times 36 = 216 = 12 \times 18$ ✓

Ejemplo 3.8: Aplicación práctica del MCD y del MCM

Aplicación del MCD (repartir en partes iguales): Tenemos 24 manzanas y 36 naranjas. Queremos hacer bolsas con el mayor número posible de frutas iguales en cada tipo, sin que sobre ninguna. ¿Cuántas bolsas podemos hacer?
Debemos encontrar $\text{mcd}(24, 36)$.

$$24 = 2^3 \cdot 3, \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\text{mcd}(24, 36) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Podemos hacer **12** bolsas: cada una llevará $24 \div 12 = 2$ manzanas y $36 \div 12 = 3$ naranjas.

Aplicación del MCM (cuándo coinciden dos eventos): Un autobús pasa cada 8 minutos y otro cada 12 minutos. Si ahora mismo salen los dos a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en volver a pasar los dos al mismo tiempo?
Debemos encontrar $\text{mcm}(8, 12)$.

$$8 = 2^3, \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{mcm}(8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

Los dos autobuses coincidirán de nuevo en **24** minutos.

Nota

Truco para recordar cuándo usar cada uno:

- **MCD** → cuando queremos el trozo más **grande** posible para repartir.
- **MCM** → cuando queremos encontrar el momento **más cercano** en que dos cosas vuelven a coincidir.

Siempre se cumple: $\text{mcd}(a, b) \times \text{mcm}(a, b) = a \times b$.

Inténtalo tú

1. Calcula $\text{mcd}(15, 20)$ y $\text{mcm}(15, 20)$ mediante la descomposición en factores primos.
2. Calcula $\text{mcd}(30, 45)$ y $\text{mcm}(30, 45)$.
3. Calcula $\text{mcd}(8, 12, 18)$ y $\text{mcm}(8, 12, 18)$. *Aplica la misma regla con tres números.*
4. Un jardín rectangular mide $84\,\text{cm}$ de largo y $60\,\text{cm}$ de ancho. Queremos cubrirlo con baldosas cuadradas iguales, sin cortarlas. ¿Cuál es el mayor lado posible de cada baldosa?
5. Tres amigos quedan para cenar. Ana puede quedar cada 6 días, Bruno cada 8 días y Carlos cada 12 días. Si hoy quedan los tres juntos, ¿cuántos días pasarán hasta que vuelvan a coincidir?
6. Comprueba con los números $a = 12$ y $b = 20$ que $\text{mcd}(a, b) \times \text{mcm}(a, b) = a \times b$.

Tema 4. Números Enteros

4.1 El Conjunto de los Números Enteros

Los números naturales $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ nos permiten contar objetos, pero hay situaciones de la vida real en las que necesitamos números menores que cero. Por ejemplo, si tienes 5 euros en el banco y gastas 8 euros, tu saldo es -3 euros (debes 3 euros). Si la temperatura es 4 grados bajo cero, escribimos $-4\,°\mathrm{C}$. Una ciudad que está a 20 metros por debajo del nivel del mar tiene altitud $-20\,\mathrm{m}$.

Para poder describir estas situaciones, ampliamos los números naturales con los **números negativos** y obtenemos los **números enteros**.

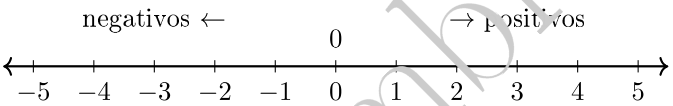
Definición 4.1: Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

El conjunto de los **números enteros** es:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

Los números con signo "$-$" se llaman **enteros negativos**; los que tienen signo "+" (o ningún signo) se llaman **enteros positivos**. El cero no es ni positivo ni negativo.

Todos los números enteros se pueden representar en la **recta numérica**: los positivos van hacia la derecha del cero y los negativos hacia la izquierda.



Ordenar enteros: en la recta numérica, el número que está más a la **izquierda** es siempre el **menor**. Por ejemplo: $-5 < -2 < 0 < 3 < 7$.

Nota

Un número negativo es siempre menor que cualquier número positivo. Entre dos negativos, el de mayor valor absoluto es el menor: $-8 < -3$ porque -8 está más a la izquierda.

Ejemplo 4.1: Comparar y ordenar enteros

Ordena de menor a mayor: $-4,\ 2,\ -10,\ 0,\ 7,\ -1$.

Los colocamos en la recta imaginaria de izquierda a derecha:

$$-10 < -4 < -1 < 0 < 2 < 7$$

Respuesta: $\mathbf{-10},\ \mathbf{-4},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2},\ \mathbf{7}$.

Ejemplo 4.2: Situaciones con enteros

Escribe un número entero para cada situación:

- Una deuda de 25 euros: -25.
- Una ganancia de 50 euros: $+50$.
- 3 plantas por debajo de la planta baja en un ascensor: -3.
- Una temperatura de 12 grados sobre cero: $+12$.
- El nivel del mar: 0.

Inténtalo tú

1. Escribe un entero para cada situación: (a) 15 m bajo el agua; (b) 200 m sobre el nivel del mar; (c) debes 7 euros a un amigo; (d) temperatura de 3 grados bajo cero.
2. Coloca los símbolos $<$, $>$ o $=$ entre cada par: $-3 \square 2$; $-7 \square -5$; $0 \square -1$; $-4 \square -4$.
3. Ordena de mayor a menor: -6, 3, -1, 0, -8, 5.
4. ¿Qué entero es tres unidades a la izquierda de -2 en la recta numérica?
5. En un edificio, la planta baja es el piso 0. Hay 3 pisos de sótano (-1, -2, -3) y 8 pisos superiores (1 a 8). Ordena todos los números de planta de menor a mayor.

4.2 Valor Absoluto

Imagina que mides cuánto se aleja un número del cero en la recta numérica. Da igual si te vas a la derecha o a la izquierda: esa distancia es siempre positiva (o cero). Eso es exactamente el valor absoluto.

Definición 4.2: Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número entero a es su distancia al cero en la recta numérica. Se escribe $|a|$ y siempre es mayor o igual que cero:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos directos: $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

El valor absoluto también nos permite calcular la **distancia entre dos enteros**: la distancia entre a y b es $|a - b|$.

Ejemplo 4.3: Calcular valores absolutos

Calcula: $|-9|$, $|7|$, $|-15|$, $|0|$, $-|-4|$.

- $|-9| = 9$ (distancia de -9 al 0 es 9)
- $|7| = 7$ (ya es positivo)
- $|-15| = 15$
- $|0| = 0$
- $-|-4| = -(4) = -4$ (cuidado: el signo negativo está *fuera* del valor absoluto)

Ejemplo 4.4: Distancia entre dos enteros

¿A qué distancia están -3 y 5 en la recta numérica?

$$\text{Distancia} = |(-3) - 5| = |-8| = 8$$

Comprobación visual: de -3 a 0 hay 3 unidades, y de 0 a 5 hay 5 unidades. En total: $3 + 5 = 8$. ✓

Inténtalo tú

1. Calcula: $|-12|$; $|8|$; $|-1|$; $|0|$; $-|-6|$.
2. ¿Cuáles de estos números tienen el mismo valor absoluto? -7, 7, -3, 3, 0.
3. Calcula la distancia entre los pares de enteros: (a) 2 y 9; (b) -5 y 3; (c) -6 y -1; (d) -4 y 4.
4. Ordena de menor a mayor según su valor absoluto: -10, 3, -2, 7, -6.
5. Si $|x| = 5$, ¿cuáles son los posibles valores de x?

4.3 Suma y Resta de Enteros

Sumar y restar enteros parece complicado al principio, pero tiene una lógica muy clara. Imagina que trabajas con dinero: los números positivos son ganancias y los negativos son deudas.

Regla 1 — Mismo signo: suma los valores absolutos y conserva el signo común.

$$(+3) + (+5) = +8 \qquad (-3) + (-5) = -8$$

Regla 2 — Distinto signo: resta el menor valor absoluto al mayor y conserva el signo del número con mayor valor absoluto.

$$7 + (-4) = +3 \qquad (-7) + 4 = -3$$

Regla 3 — Restar un negativo: restar un número negativo equivale a sumar su valor absoluto.

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8 \qquad (-2) - (-6) = (-2) + 6 = 4$$

Ejemplo 4.5: Sumas con el mismo signo

Calcula $(-4) + (-7)$.

Ambos son negativos, así que sumamos los valores absolutos y ponemos el signo negativo:

$$|-4| + |-7| = 4 + 7 = 11 \quad \Rightarrow \quad (-4) + (-7) = \mathbf{-11}$$

Analogía: debes 4 euros y te piden otros 7 euros más. En total debes 11 euros.

Ejemplo 4.6: Sumas y restas con distinto signo

Calcula: (a) $(-9) + 5$ (b) $3 - (-8)$ (c) $(-6) - 4$

(a) Signos distintos. $|-9| = 9 > |5| = 5$, así que el resultado es negativo:

$$(-9) + 5 = -(9 - 5) = -4$$

(b) Restar un negativo es sumar:

$$3 - (-8) = 3 + 8 = 11$$

(c) Mismo signo (los dos negativos):

$$(-6) - 4 = (-6) + (-4) = -(6 + 4) = -10$$

Ejemplo 4.7: Cadena de operaciones

Calcula $5 - 3 + (-4) - (-2) + (-6)$.

Primero convertimos todas las restas de negativos en sumas:

$$5 - 3 + (-4) + 2 + (-6)$$

Agrupamos positivos y negativos:

$$(5 + 2) + (-3 + (-4) + (-6)) = 7 + (-13) = \mathbf{-6}$$

Inténtalo tú

1. Calcula: $(-5) + (-3)$; $(-8) + 2$; $4 + (-9)$; $(-1) + 1$.
2. Calcula: $7 - (-3)$; $(-4) - (-6)$; $0 - (-5)$; $(-2) - (-2)$.
3. Calcula: $(-3) + (-5) - (-2)$; $8 - 3 + (-6)$; $(-7) + 4 - (-1)$.
4. Un submarino está a -80 m de profundidad. Sube 35 m. ¿A qué profundidad queda?
5. La temperatura a mediodía era 3 °C. Por la noche bajó 10 °C. ¿Cuál es la temperatura nocturna?
6. Calcula: $(-12) + 7 - (-4) + (-3) - 5$.

4.4 Multiplicación y División de Enteros

Para multiplicar o dividir enteros, primero hacemos la operación con los valores absolutos y después aplicamos la **regla de los signos**.

Teorema 4.1: Regla de los signos

Signo del 1.º	Signo del 2.º	Resultado
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Resumen: **iguales** $\Rightarrow$ positivo; **diferentes** $\Rightarrow$ negativo.

Puedes entender la regla $(-) \cdot (-) = (+)$ con este patrón:

$$3 \cdot (-2) = -6, \quad 2 \cdot (-2) = -4, \quad 1 \cdot (-2) = -2, \quad 0 \cdot (-2) = 0,$$

$$(-1) \cdot (-2) = 2, \quad (-2) \cdot (-2) = 4, \quad (-3) \cdot (-2) = 6.$$

Cada vez que el primer factor baja una unidad, el resultado sube 2: ¡la lógica nos lleva a que $(-) \cdot (-) = (+)$!

Ejemplo 4.8: Productos y cocientes

Calcula: (a) $(-4)\cdot 3$ (b) $(-5)\cdot(-6)$ (c) $(-18)\div(-3)$ (d) $20\div(-4)$

(a) Signos diferentes $\Rightarrow$ negativo: $4\cdot 3 = 12 \Rightarrow (-4)\cdot 3 = \mathbf{-12}$.
(b) Signos iguales (ambos negativos) $\Rightarrow$ positivo: $5\cdot 6 = 30 \Rightarrow (-5)\cdot(-6) = \mathbf{+30}$.
(c) Signos iguales $\Rightarrow$ positivo: $18\div 3 = 6 \Rightarrow (-18)\div(-3) = \mathbf{+6}$.
(d) Signos diferentes $\Rightarrow$ negativo: $20\div 4 = 5 \Rightarrow 20\div(-4) = \mathbf{-5}$.

Ejemplo 4.9: Cadena de productos

Calcula $(-2)\cdot 3\cdot(-5)\cdot(-1)$.

Calculamos paso a paso:

$$(-2)\cdot 3 = -6, \qquad (-6)\cdot(-5) = +30, \qquad 30\cdot(-1) = \mathbf{-30}.$$

Truco rápido: cuenta el número de factores negativos. Si hay un número **par** de negativos, el resultado es positivo; si hay un número **impar**, el resultado es negativo. Aquí hay 3 negativos (impar) $\Rightarrow$ resultado negativo. ✓

Potencias de números negativos

Cuando elevamos un número negativo a una potencia, aplicamos la regla de los signos repetidamente:

$$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4 \qquad (\text{exponente par} \Rightarrow \text{positivo})$$
$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +4\cdot(-2) = -8 \qquad (\text{exponente impar} \Rightarrow \text{negativo})$$

Nota

Cuidado con la diferencia entre $(-3)^2 = 9$ y $-3^2 = -9$. En el primer caso el paréntesis indica que la base es -3. En el segundo, la potencia solo afecta al 3, y el signo negativo se aplica después: $-(3^2) = -9$.

Ejemplo 4.10: Potencias de bases negativas

Calcula: (a) $(-3)^4$ (b) $(-2)^5$ (c) $(-1)^{100}$ (d) $(-1)^7$

(a) Exponente 4 (par) $\Rightarrow$ positivo: $(-3)^4 = 3^4 = \mathbf{81}$.
(b) Exponente 5 (impar) $\Rightarrow$ negativo: $(-2)^5 = -(2^5) = -32 = \mathbf{-32}$.
(c) Exponente 100 (par) $\Rightarrow$ positivo: $(-1)^{100} = \mathbf{1}$.
(d) Exponente 7 (impar) $\Rightarrow$ negativo: $(-1)^7 = \mathbf{-1}$.

Inténtalo tú

1. Calcula los productos: $(-3)\cdot 8$; $(-7)\cdot(-5)$; $4\cdot(-9)$; $(-1)\cdot(-1)$.
2. Calcula los cocientes: $(-24)\div 6$; $(-30)\div(-5)$; $16\div(-4)$; $(-45)\div(-9)$.
3. Calcula las potencias: $(-4)^2$; $(-2)^4$; $(-3)^3$; $(-5)^2$; $(-1)^{11}$.
4. ¿Cuál es el signo de $(-2)^6\cdot(-3)^5$? Justifica sin calcular el resultado.
5. Calcula: $(-2)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 4$; $(-5)^2\div(-5)$; $(-2)^3\cdot(-3)^2$.
6. Una empresa pierde 1500 euros al mes. ¿Cuánto habrá perdido en 6 meses? Expresa la respuesta como un entero.

Tema 5. Números Decimales y Sistema Métrico Decimal

5.1 Lectura y Escritura de Decimales

Un número decimal tiene una parte entera y una parte decimal separadas por una coma. La parte decimal expresa fracciones de la unidad: la primera cifra tras la coma vale **décimas** ($\frac{1}{10}$), la segunda vale **centésimas** ($\frac{1}{100}$), la tercera vale **milésimas** ($\frac{1}{1000}$), y así sucesivamente. Comprender el valor de cada posición nos permite leer, escribir y descomponer cualquier número decimal.

Definición 5.1: Valor posicional decimal

En un número decimal, cada cifra tiene un valor que depende de su posición respecto a la coma:

$$\underbrace{4}_{\text{unid.}}.\underbrace{3}_{\text{déc.}}\underbrace{0}_{\text{cent.}}\underbrace{7}_{\text{milés.}} = 4 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000}$$

El número 4.307 se lee *"cuatro coma trescientos siete"* (se leen todas las cifras decimales juntas como si fueran un número entero). También podemos descomponerlo en suma de fracciones:

$$4.307 = 4 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000}$$

Ejemplo 5.1: Lectura y descomposición de decimales

Lee y descompón el número 5.038.

Lectura: "cinco coma cero treinta y ocho".
Descomposición:

$$5.038 = 5 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} = 5 + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000}$$

La cifra 0 en las décimas ocupa su posición pero no aporta valor.

Ejemplo 5.2: Escritura de decimales desde palabras

Escribe en cifras: "doce coma cero nueve".

La parte entera es 12. Necesitamos dos cifras decimales: el cero ocupa las décimas y el 9 las centésimas.

Resultado: 12.09

Comprobación: $12.09 = 12 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} = 12 + \frac{9}{100}$. ✓

✎ Inténtalo tú

1. Lee en voz alta (o escribe con palabras): 3.5; 0.07; 12.304; 100.010.
2. Escribe en cifras: *"ocho coma cinco cero dos"*; *"cero coma cero cero seis"*; *"veintitrés coma cuatro"*.
3. ¿Qué valor tiene la cifra 4 en cada número?: 4.1; 0.04; 2.400; 3.004.
4. Descompón como suma de fracciones: 7.53; 0.608; 2.070.
5. Ordena de menor a mayor las siguientes cifras según su valor posicional en 6.382: la cifra 3 (décimas), la cifra 8 (centésimas), la cifra 2 (milésimas).

5.2 Tipos de Decimales

Cuando dividimos un número entre otro, el resultado puede tener diferentes comportamientos en su parte decimal. Según ese comportamiento, los números decimales se clasifican en cuatro tipos.

Definición 5.2: Tipos de decimales

- **Decimal exacto (finito):** la parte decimal tiene un número finito de cifras.
  Ejemplo: 0.75 (termina en la centésima).
- **Periódico puro:** la parte decimal es un grupo de cifras que se repite indefinidamente desde la primera décima. Se anota con una barra encima del periodo.
  Ejemplo: $0.\overline{3} = 0.333\ldots$ (el 3 se repite).
- **Periódico mixto:** hay una parte decimal que no se repite (anteperiodo) seguida de un periodo.
  Ejemplo: $0.1\overline{6} = 0.1666\ldots$ (el 6 se repite).
- **Irracional:** la parte decimal es infinita y *nunca* se repite.
  Ejemplo: $\pi = 3.14159\ldots$; $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$

Para identificar el tipo, podemos hacer la división larga y observar si los restos se repiten (periódico) o no.

Ejemplo 5.3: Identificar el tipo de decimal

Clasifica los siguientes números: 0.125; $0.\overline{7}$; $0.41\overline{6}$; $\sqrt{3}$.

- 0.125: tiene 3 cifras decimales y termina. Es **exacto**.
- $0.\overline{7} = 0.777\ldots$: el 7 se repite desde el principio. Es **periódico puro**.
- $0.41\overline{6} = 0.41666\ldots$: "41" no se repite (anteperiodo) y "6" se repite (periodo). Es **periódico mixto**.
- $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$: infinito y sin patrón. Es **irracional**.

Ejemplo 5.4: Ordenar decimales en la recta

Ordena de menor a mayor: 0.5; $0.\overline{3}$; 0.35; 0.51.

Comparamos cifra a cifra desde la primera décima:

$$0.\overline{3} = 0.333\ldots < 0.35 < 0.5 < 0.51$$

Resultado: $0.\overline{3} < 0.35 < 0.5 < 0.51$.

Inténtalo tú

1. Clasifica como exacto, periódico puro, periódico mixto o irracional: 1.6; $0.\overline{4}$; $2.3\overline{1}$; π; 0.125; $\sqrt{5}$.
2. Realiza la división $5 \div 6$ hasta obtener 4 decimales e identifica el tipo.
3. Realiza la división $7 \div 8$ hasta obtener el decimal exacto.
4. Ordena de mayor a menor: $0.\overline{6}$; 0.6; 0.66; 0.61.
5. Escribe un ejemplo propio de cada tipo de decimal.

5.3 Operaciones con Decimales

Suma y resta

Para sumar o restar decimales, el truco clave es **alinear las comas** de todos los números en la misma columna. Una vez alineados, operamos exactamente igual que con números naturales, columna por columna.

Ejemplo 5.5: Suma y resta de decimales

Calcula: (a) $3.47 + 12.5 + 0.038$ (b) $7.3 - 2.845$

(a) Alineamos las comas y completamos con ceros:

$$\begin{array}{r} 3.470 \\ 12.500 \\ +\ 0.038 \\ \hline 16.008 \end{array}$$

(b) Completamos con ceros y restamos:

$$\begin{array}{r} 7.300 \\ -\ 2.845 \\ \hline 4.455 \end{array}$$

Multiplicación

Multiplicamos los dos números **ignorando la coma**, como si fueran enteros. Después contamos el **total de cifras decimales** que tenían entre los dos factores y colocamos la coma en el resultado dejando ese número de decimales desde la derecha.

Ejemplo 5.6: Multiplicación de decimales

Calcula 2.4×1.35.

Multiplicamos $24 \times 135 = 3240$.
Cifras decimales: 2.4 tiene 1 decimal; 1.35 tiene 2 decimales. Total: $1 + 2 = 3$ decimales.
Colocamos la coma dejando 3 decimales desde la derecha: $3.240 = \mathbf{3.240}$.

Comprobación aproximada: $2.4 \approx 2$ y $1.35 \approx 1$, así que el resultado debe estar cerca de 2. ✓

División entre un número entero

Dividimos como si fuera una división normal. Cuando llegamos a la coma en el dividendo, colocamos la coma en el cociente y seguimos dividiendo.

Ejemplo 5.7: División de un decimal entre un entero

Calcula $8.64 \div 4$.

$$8 \div 4 = 2 \text{ (resto 0)}, \quad \text{bajamos 6}: \quad 6 \div 4 = 1 \text{ (resto 2)}, \quad \text{ponemos coma en el cociente,}$$

$$\text{bajamos 4 (que era la centésima)}: \quad 24 \div 4 = 6 \text{ (resto 0)}.$$

$$8.64 \div 4 = \mathbf{2.16}$$

Comprobación: $4 \times 2.16 = 8.64$. ✓

Redondeo

A veces necesitamos expresar un número decimal con menos cifras. El redondeo consiste en mantener un número de cifras y ajustar la última según la cifra siguiente: si la cifra **siguiente** es ≥ 5, aumentamos la última cifra conservada en 1; si es < 5, la dejamos igual.

Ejemplo 5.8: Redondeo a décimas y centésimas

Redondea 3.462 a las décimas y a las centésimas.

A las décimas (conservamos 1 decimal): miramos la centésima: $6 \geq 5 \Rightarrow$ subimos: $3.462 \approx$ **3.5**.
A las centésimas (conservamos 2 decimales): miramos la milésima: $2 < 5 \Rightarrow$ dejamos igual: $3.462 \approx$ **3.46**.

Inténtalo tú

1. Calcula: $5.3 + 0.47 + 12.005$; $8.2 - 3.145$.
2. Calcula: 3.5×2.4; 0.12×0.5; 1.5×1.5.
3. Calcula: $6.48 \div 3$; $9.35 \div 5$; $0.84 \div 4$.
4. Redondea 7.384 a las décimas y a las centésimas.
5. Redondea 0.995 a las décimas.
6. Un kilómetro de cable pesa $2.35\,\text{kg}$. ¿Cuánto pesan 4 kilómetros de ese cable?

5.4 Sistema Métrico Decimal

El **Sistema Métrico Decimal** es el sistema de medida que usamos en España y en casi todo el mundo. Está basado en el número 10: cada unidad es 10 veces mayor que la siguiente inferior. La unidad principal de longitud es el **metro** (m); de masa, el **gramo** (g); y de capacidad, el **litro** (l).

Definición 5.3: Tabla de prefijos

Prefijo	Longitud	Relación con la unidad	Valor
kilo	kilómetro (km)	$1\,\text{km} = 1000\,\text{m}$	$\times 10^3$
hecto	hectómetro (hm)	$1\,\text{hm} = 100\,\text{m}$	$\times 10^2$
deca	decámetro (dam)	$1\,\text{dam} = 10\,\text{m}$	$\times 10^1$
—	**metro (m)**	**unidad base**	$\times 10^0$
deci	decímetro (dm)	$1\,\text{m} = 10\,\text{dm}$	$\div 10^1$
centi	centímetro (cm)	$1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$	$\div 10^2$
mili	milímetro (mm)	$1\,\text{m} = 1000\,\text{mm}$	$\div 10^3$

Cómo convertir: cada paso hacia la derecha en la tabla (de una unidad mayor a una menor) equivale a **multiplicar por 10** (o desplazar la coma un lugar a la derecha). Cada paso hacia la izquierda (de menor a mayor) equivale a **dividir entre 10** (desplazar la coma a la izquierda).

Nota

Los mismos prefijos se aplican a la masa (kilogramo, gramo, miligramo…) y a la capacidad (kilolitro, litro, centilitro, mililitro…). La unidad de referencia cambia, pero las relaciones entre prefijos son idénticas.

Ejemplo 5.9: Conversiones de longitud

Convierte: (a) 3.5 km a metros (b) 450 cm a metros (c) 2700 mm a metros

(a) De km a m: 3 pasos a la derecha en la tabla ⇒ multiplicar por 1000:

$$3.5\,\text{km} = 3.5 \times 1000\,\text{m} = \mathbf{3500}\,\text{m}$$

(b) De cm a m: 2 pasos a la izquierda ⇒ dividir entre 100:

$$450\,\text{cm} = 450 \div 100\,\text{m} = \mathbf{4.5}\,\text{m}$$

(c) De mm a m: 3 pasos a la izquierda ⇒ dividir entre 1000:

$$2700\,\text{mm} = 2700 \div 1000\,\text{m} = \mathbf{2.7}\,\text{m}$$

Ejemplo 5.10: Conversiones de masa y capacidad

Convierte: (a) 4200 g a kg (b) 0.75 l a ml

(a) De g a kg: 3 pasos a la izquierda ⇒ dividir entre 1000:

$$4200\,\text{g} = 4200 \div 1000\,\text{kg} = \mathbf{4.2}\,\text{kg}$$

(b) De l a ml: 3 pasos a la derecha ⇒ multiplicar por 1000:

$$0.75\,\text{l} = 0.75 \times 1000\,\text{ml} = \mathbf{750}\,\text{ml}$$

Inténtalo tú

1. Convierte a metros: 2 km; 3.5 hm; 800 cm; 55 mm.
2. Convierte a centímetros: 3 m; 1.5 dm; 0.4 m.
3. Convierte a kilogramos: 3500 g; 250 g; 7000 g.
4. Convierte a litros: 3000 ml; 250 cl; 0.5 kl.
5. Una piscina mide 25 m de longitud. ¿Cuántos kilómetros recorre un nadador que da 10 largos?
6. Un paquete pesa 1.25 kg. ¿Cuántos gramos pesa?

Tema 6. Fracciones

6.1 Concepto de Fracción

Imagina que cortas una pizza en 8 porciones iguales y te comes 3. Acabas de comer $\frac{3}{8}$ de la pizza. El número de abajo (el **denominador**) indica en cuántas partes iguales se ha dividido el total; el número de arriba (el **numerador**) indica cuántas de esas partes tomamos.

Definición 6.1: Fracción

Una **fracción** $\dfrac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) representa a partes de un todo dividido en b partes iguales. El número a se llama **numerador** y el número b se llama **denominador**.

Según la relación entre numerador y denominador, las fracciones se clasifican en:

- **Fracción propia:** el numerador es menor que el denominador. Representa menos de una unidad. Ejemplo: $\dfrac{3}{5}$.
- **Fracción impropia:** el numerador es mayor o igual que el denominador. Representa una unidad o más. Ejemplo: $\dfrac{7}{3}$.
- **Número mixto:** una parte entera más una fracción propia. Ejemplo: $2\dfrac{1}{3}$ (dos enteros y un tercio).

Convertir fracción impropia a número mixto: dividimos numerador entre denominador. El cociente es la parte entera y el resto sobre el denominador es la parte fraccionaria. Por ejemplo: $\dfrac{11}{4} = 2\,\dfrac{3}{4}$ (pues $11 = 4 \times 2 + 3$).

Fracciones equivalentes son fracciones diferentes que representan la misma cantidad:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots$$

Para obtener una fracción equivalente, multiplicamos (o dividimos) el numerador y el denominador por el mismo número distinto de cero.

Definición 6.2: Fracción irreducible

Una fracción es **irreducible** cuando el mcd de su numerador y su denominador es 1 (no se pueden simplificar más). Para reducir una fracción dividimos numerador y denominador entre su mcd.

Ejemplo 6.1: Fracciones equivalentes y reducción

Halla tres fracciones equivalentes a $\dfrac{2}{5}$ y reduce $\dfrac{18}{24}$ a su forma irreducible.

Equivalentes a $\frac{2}{5}$: multiplicamos numerador y denominador por 2, 3 y 4:

$$\frac{2\times 2}{5\times 2} = \frac{4}{10}, \qquad \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15}, \qquad \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20}.$$

Reducción de $\frac{18}{24}$: $\mathrm{mcd}(18, 24) = 6$.

$$\frac{18}{24} = \frac{18\div 6}{24\div 6} = \frac{3}{4}.$$

La fracción irreducible es $\dfrac{3}{4}$.

Ejemplo 6.2: Convertir fracción impropia a número mixto

Convierte $\frac{17}{5}$ a número mixto.

Dividimos $17 \div 5$: cociente $= 3$, resto $= 2$.

$$\frac{17}{5} = 3\,\frac{2}{5} \quad \text{(tres enteros y dos quintos)}$$

Comprobación: $3\,\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$. ✓

Inténtalo tú

1. Clasifica como propia, impropia o número mixto: $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{4}$; $1\frac{2}{3}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{2}{11}$.
2. Halla tres fracciones equivalentes a: $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{2}$.
3. Reduce a fracción irreducible: $\frac{12}{16}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{36}{48}$; $\frac{7}{14}$.
4. Convierte a número mixto: $\frac{13}{4}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{11}{3}$.
5. Convierte a fracción impropia: $3\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{5}$; $4\frac{1}{4}$.

6.2 Comparación y Ordenación de Fracciones

Para comparar fracciones necesitamos que tengan el mismo denominador. Si ya lo tienen, basta con comparar los numeradores. Si tienen denominadores distintos, buscamos el **mínimo común denominador**, que es el mcm de los denominadores, y transformamos cada fracción en una equivalente con ese denominador.

Ejemplo 6.3: Comparar fracciones con distinto denominador

¿Cuál es mayor, $\frac{3}{4}$ o $\frac{5}{7}$?

Calculamos el $\text{mcm}(4, 7) = 28$. Convertimos:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28} \qquad \frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$$

Como $21 > 20$, tenemos $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$, es decir $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

Ejemplo 6.4: Ordenar varias fracciones

Ordena de menor a mayor: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}$.

$\text{mcm}(2,3,8) = 24$. Convertimos cada fracción:

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{24}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{16}{24}, \qquad \frac{3}{8} = \frac{9}{24}.$$

Comparamos numeradores: $9 < 12 < 16$, luego:

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Inténtalo tú

1. Compara (escribe <, > o =): $\frac{3}{5} \square \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \square \frac{3}{4}$; $\frac{5}{6} \square \frac{7}{9}$.
2. Ordena de menor a mayor: $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.
3. Ordena de mayor a menor: $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.
4. ¿Cuál de estas fracciones está más cerca de 1?: $\frac{5}{6}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{7}{8}$.
5. Ordena: $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}$.

6.3 Operaciones con Fracciones

Suma y resta con el mismo denominador

Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador, sumamos o restamos los numeradores y conservamos el denominador:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Suma y resta con distinto denominador

Si los denominadores son distintos, primero buscamos el mcm de los denominadores (mínimo común denominador), convertimos cada fracción a ese denominador y luego operamos.

Ejemplo 6.5: Suma de fracciones con distinto denominador

Calcula $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Paso 1: $\text{mcm}(3,4) = 12$.
Paso 2: Convertimos cada fracción:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}, \qquad \frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}.$$

Paso 3: Sumamos:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

La fracción $\frac{7}{12}$ ya es irreducible ($\text{mcd}(7,12) = 1$).

Multiplicación de fracciones

Multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador. Conviene simplificar antes de multiplicar si es posible.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

División de fracciones

Dividir por una fracción equivale a multiplicar por su **fracción inversa** (invertimos numerador y denominador de la segunda fracción):

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo 6.6: Multiplicación y división

Calcula: (a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}$ (b) $\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}$

(a) Simplificamos antes de multiplicar: el 3 del numerador y el 3 del denominador se cancelan; el 2 y el 8 dan 4:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 8}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

(b) Invertimos la segunda fracción y multiplicamos:

$$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 2}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}=1\,\frac{1}{4}.$$

Ejemplo 6.7: Operaciones combinadas

Calcula $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$.

$\mathrm{mcm}(4,6,3)=12$. Convertimos todas:

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12},\qquad \frac{1}{6}=\frac{2}{12},\qquad \frac{1}{3}=\frac{4}{12}.$$

Operamos:

$$\frac{9}{12}+\frac{2}{12}-\frac{4}{12}=\frac{9+2-4}{12}=\frac{7}{12}.$$

Inténtalo tú

1. Calcula y simplifica: $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$; $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$; $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$.
2. Calcula: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$; $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$.
3. Calcula: $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}$; $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{4}$; $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$.
4. Calcula: $\frac{3}{4}\div\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}\div\frac{5}{3}$; $\frac{2}{9}\div\frac{4}{3}$.
5. Una receta necesita $\frac{3}{4}$ de taza de harina. Si queremos hacer la mitad de la receta, ¿cuánta harina necesitamos?
6. Calcula $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ (respeta la jerarquía de operaciones).

6.4 Fracciones y Números Decimales

Las fracciones y los decimales son dos formas de representar la misma cantidad. Podemos pasar de una forma a la otra con operaciones sencillas.

Fracción a decimal: dividimos el numerador entre el denominador.

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75 \qquad \frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0.\overline{3}$$

Decimal exacto a fracción: escribimos las cifras decimales en el numerador y una potencia de 10 (con tantos ceros como cifras decimales) en el denominador; después simplificamos.

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \qquad 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Decimal periódico puro a fracción: el periodo va en el numerador y en el denominador ponemos tantos nueves como cifras tiene el periodo.

$$0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad 0.\overline{72} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

Ejemplo 6.8: De fracción a decimal

Convierte a decimal: (a) $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{5}{6}$

(a) Dividimos $7 \div 8$:

$$7.000 \div 8 = 0.875 \quad \text{(decimal exacto)}$$

(b) Dividimos $5 \div 6$:

$$5.000\ldots \div 6 = 0.8333\ldots = 0.8\overline{3} \quad \text{(periódico mixto)}$$

El anteperiodo es 8 y el periodo es 3.

Ejemplo 6.9: De decimal a fracción

Convierte a fracción irreducible: (a) 0.35 (b) $0.\overline{6}$ (c) 0.125

(a) Dos cifras decimales, denominador 100:

$$0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \quad (\mathrm{mcd}(35, 100) = 5).$$

(b) Periodo de una cifra, denominador 9:

$$0.\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\mathrm{mcd}(6, 9) = 3).$$

(c) Tres cifras decimales, denominador 1000:

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \quad (\mathrm{mcd}(125, 1000) = 125).$$

Inténtalo tú

1. Convierte a decimal: $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$.
2. Convierte a fracción irreducible: 0.5; 0.4; 0.625; 0.12.
3. Convierte el decimal periódico a fracción: $0.\overline{1}$; $0.\overline{4}$; $0.\overline{27}$.
4. ¿Cuál es mayor, $\frac{7}{9}$ o 0.78? Transforma ambos al mismo formato para comparar.
5. Ordena de menor a mayor: $\frac{1}{4}$; 0.3; $\frac{1}{3}$; 0.25.
6. Un alumno ha respondido bien $\frac{7}{10}$ de un test. Si el test tiene 30 preguntas, ¿cuántas ha respondido bien? Expresa el resultado como decimal y como fracción.

Tema 7. Proporcionalidad y Porcentajes

7.1 Razón y Proporción

Cuando comparamos dos cantidades dividiéndolas, obtenemos una **razón**. Por ejemplo, si en una clase hay 12 chicos y 15 chicas, la razón de chicos a chicas es $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, es decir, por cada 4 chicos hay 5 chicas.

Definición 7.1: Razón y Proporción

La **razón** entre dos cantidades a y b (con $b \neq 0$) es el cociente $\dfrac{a}{b}$, también escrito $a{:}b$.
Una **proporción** es la igualdad de dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Propiedad fundamental: en toda proporción se cumple que el producto en cruz es igual:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Esta propiedad nos permite encontrar un valor desconocido.

Nota

Los términos a y d se llaman **extremos**; b y c se llaman **medios**. En toda proporción: extremos $\times$ extremos $=$ medios $\times$ medios.

Ejemplo 7.1: Verificar una proporción

¿Son proporcionales las razones $\dfrac{6}{9}$ y $\dfrac{8}{12}$?
Solución: Comprobamos el producto en cruz:

$$6 \cdot 12 = 72 \qquad \text{y} \qquad 9 \cdot 8 = 72$$

Como ambos productos son iguales, **sí** forman una proporción: $\dfrac{6}{9} = \dfrac{8}{12}$.

Ejemplo 7.2: Encontrar el término desconocido

Si $\dfrac{3}{5} = \dfrac{x}{20}$, ¿cuánto vale x?
Solución: Aplicamos la propiedad fundamental:

$$3 \cdot 20 = 5 \cdot x \implies 60 = 5x \implies x = \frac{60}{5} = 12$$

Comprobación: $\dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$. ✓

Inténtalo tú

1. Escribe la razón (simplificada) en cada caso:

   a) 8 a 12 b) 15 a 25 c) 40 a 64

2. ¿Forman proporción $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$? Justifica con el producto en cruz.
3. Halla el valor de x en cada proporción:

   a) $\frac{4}{x} = \frac{8}{10}$ b) $\frac{x}{6} = \frac{9}{18}$ c) $\frac{7}{14} = \frac{x}{6}$

4. En una receta se usan 3 huevos por cada 200 g de harina. ¿Cuántos huevos hacen falta para 600 g de harina?
5. Un mapa tiene escala 1:50000. Si dos ciudades están a 4 cm en el mapa, ¿cuál es la distancia real en kilómetros?
6. En un semáforo se repiten los colores en ciclos de 90 segundos: 45 s verde, 15 s ámbar, 30 s rojo. ¿Cuál es la razón verde:rojo en su mínima expresión?

7.2 Magnitudes Directamente Proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por ese mismo número. En una tabla, la razón $\frac{y}{x}$ siempre es igual a la misma constante k, llamada **constante de proporcionalidad**.

Definición 7.2: Proporcionalidad directa

x e y son directamente proporcionales si existe una constante k tal que

$$\frac{y}{x} = k \iff y = k \cdot x$$

En la tabla de valores, todos los cocientes y/x son iguales.

Regla de tres directa: si sabemos que x_1 corresponde a y_1 y queremos encontrar y_2 correspondiente a x_2, planteamos:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \implies y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$$

Ejemplo 7.3: Precio de manzanas

Si 3 kg de manzanas cuestan €4.50, ¿cuánto costarán 5 kg?
Paso 1. Identificamos las magnitudes: kilogramos y euros. Al comprar más kilos pagamos más → proporcionalidad **directa**.
Paso 2. Planteamos la regla de tres:

$$\frac{4.50\ €}{3\ \text{kg}} = \frac{x}{5\ \text{kg}}$$

Paso 3. Despejamos x con el producto en cruz:

$$x = \frac{4.50 \cdot 5}{3} = \frac{22.50}{3} = 7.50\ €$$

Respuesta: 5 kg de manzanas cuestan €7.50.

Ejemplo 7.4: Velocidad constante

Un coche recorre 120 km en 2 horas a velocidad constante. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?

Paso 1. Tiempo y distancia son directamente proporcionales (a mayor tiempo, mayor distancia).

Paso 2. Constante $k = \frac{120}{2} = 60$ km/h.

Paso 3.

$$x = 60 \cdot 5 = 300 \text{ km}$$

O por regla de tres: $\frac{120}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{120 \cdot 5}{2} = 300$ km.

Inténtalo tú

1. Un grifo llena 12 litros en 4 minutos. ¿Cuántos litros llenará en 10 minutos?
2. Si 6 lápices cuestan €2.40, ¿cuánto costarán 15 lápices?
3. En una fábrica se producen 450 piezas en 9 horas. ¿Cuántas piezas se producirán en 12 horas?
4. Un coche consume 8 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos litros necesita para recorrer 350 km?
5. Completa la tabla sabiendo que y es directamente proporcional a x:

x	2	5	8	10
y	6			

6. Si 2,5 m de tela cuestan €7.50, ¿cuánto cuestan 4 m?

7.3 Magnitudes Inversamente Proporcionales

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda *dividida* por ese mismo número. El producto de los dos valores siempre es constante.

Definición 7.3: Proporcionalidad inversa

x e y son inversamente proporcionales si existe una constante k tal que

$$x \cdot y = k \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{k}{x}$$

En la tabla de valores, todos los *productos* $x \cdot y$ son iguales.

Regla de tres inversa: si x_1 corresponde a y_1, para encontrar y_2 correspondiente a x_2 *invertimos* una de las razones:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2} \Longrightarrow y_2 = \frac{y_1 \cdot x_1}{x_2}$$

Nota

Truco para no confundirse: pregunta siempre «¿si la primera magnitud aumenta, la segunda aumenta o disminuye?» Si *aumenta* → directa. Si *disminuye* → inversa.

Ejemplo 7.5: Trabajadores y días

Si 4 trabajadores tardan 6 días en pintar un edificio, ¿cuántos días tardarán 8 trabajadores?
Paso 1. Si hay más trabajadores, tardan *menos* días → proporcionalidad **inversa**.
Paso 2. Constante $k = 4 \cdot 6 = 24$.
Paso 3.

$$8 \cdot x = 24 \implies x = \frac{24}{8} = 3 \text{ días}$$

Respuesta: 8 trabajadores tardan 3 días.

Ejemplo 7.6: Velocidad y tiempo

Un coche tarda 4 horas en llegar a su destino viajando a 90 km/h. ¿Cuánto tardará si viaja a 120 km/h?
Paso 1. A mayor velocidad, menor tiempo → inversa.
Paso 2. $k = 90 \cdot 4 = 360$ (km totales).
Paso 3.

$$120 \cdot x = 360 \implies x = \frac{360}{120} = 3 \text{ horas}$$

Respuesta: tardará 3 horas.

Inténtalo tú

1. 5 máquinas producen 300 piezas en 4 horas. ¿Cuánto tardarán 10 máquinas?
2. Si 6 grifos llenan un depósito en 8 horas, ¿cuánto tardarán 4 grifos?
3. Una tubería llena una piscina en 12 horas. ¿Cuántas horas tardarían 3 tuberías iguales?
4. Un coche llega a su destino en 3 horas a 100 km/h. ¿A qué velocidad debería ir para llegar en 2 horas?
5. Completa la tabla sabiendo que y es inversamente proporcional a x:

x	2	4	6	12
y	24			

6. 3 obreros construyen un muro en 10 días. ¿Cuántos obreros harían falta para hacerlo en 5 días?

7.4 Porcentajes

Porcentaje significa «por cada cien». Decir que el 30 % de los alumnos aprobaron equivale a decir que de cada 100 alumnos, 30 aprobaron.

Definición 7.4: Porcentaje

El $p\,\%$ de una cantidad A se calcula:

$$p\,\% \text{ de } A = \frac{p}{100} \cdot A$$

También podemos expresar qué porcentaje representa una parte P de un total A:

$$\text{porcentaje} = \frac{P}{A} \cdot 100$$

Calcular el porcentaje de una cantidad

Ejemplo 7.7: Hallar el tanto por ciento de un número

¿Cuánto es el 15 % de 200?

$$\frac{15}{100} \cdot 200 = 0.15 \cdot 200 = 30$$

El 15 % de 200 es **30**.

Calcular qué porcentaje es una parte del total

Ejemplo 7.8: ¿Qué porcentaje representa 45 de 180?

$$\frac{45}{180} \cdot 100 = 0.25 \cdot 100 = 25\,\%$$

45 es el **25** % de 180.

Calcular el total conociendo la parte y el porcentaje

Si sabemos que el 20 % de cierta cantidad es 14, podemos encontrar el total:

$$\frac{20}{100} \cdot A = 14 \implies A = \frac{14 \cdot 100}{20} = 70$$

Aumentos y descuentos porcentuales

Definición 7.5: Aumento y descuento

- **Aumento** de p %: multiplicar por $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Ejemplo: +20 % → multiplicar por 1.20.
- **Descuento** de p %: multiplicar por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Ejemplo: −15 % → multiplicar por 0.85.

Ejemplo 7.9: Descuento en unas zapatillas

Unas zapatillas cuestan €80 y están rebajadas un 25 %. ¿Cuál es el precio final?
Paso 1. Calculamos el descuento:

$$\frac{25}{100} \cdot 80 = 20 \text{ €}$$

Paso 2. Precio final:

$$80 - 20 = 60 \text{ €}$$

O directamente: $80 \cdot 0.75 = 60$ €. (Multiplicamos por $1 - 0.25 = 0.75$.)

Ejemplo 7.10: Subida de sueldo

Una persona gana €1200 al mes. Le suben el sueldo un 8 %. ¿Cuánto cobrará ahora?

$$1200 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1200 \cdot 1.08 = 1296 \text{ €}$$

Cobrará **€1296** al mes.

Nota

Para aplicar un descuento del 30 % basta con multiplicar por 0.70, ya que pagas el 70 % del precio original. ¡No hace falta calcular el descuento por separado!

Inténtalo tú

1. Calcula:

   a) El 20 % de 350. b) El 7 % de 400. c) El 3.5 % de 600.

2. ¿Qué porcentaje representa 18 de 72? ¿Y 15 de 60?
3. En un examen de 40 preguntas, un alumno acierta 28. ¿Qué porcentaje ha acertado?
4. Una televisión cuesta €360. Si hay un descuento del 15 %, ¿cuál es el precio final?
5. El precio de un libro sube un 10 %. Si antes costaba €25, ¿cuánto cuesta ahora?
6. En una clase de 30 alumnos, el 40 % practica algún deporte. ¿Cuántos alumnos practican deporte?
7. El 35 % de una cantidad es 63. ¿Cuál es esa cantidad?
8. Un artículo cuesta €48 después de aplicar un descuento del 20 %. ¿Cuál era el precio original?

Tema 8. Álgebra y Ecuaciones de Primer Grado

8.1 Expresiones Algebraicas

En álgebra usamos **letras** para representar números que aún no conocemos o que pueden cambiar. Gracias a esto podemos escribir reglas generales que sirven para cualquier número.

Definición 8.1: Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras (llamadas **variables** o **incógnitas**) y operaciones matemáticas.

- **Variable:** la letra que representa un número desconocido (por ejemplo, x, y, n).
- **Coeficiente:** el número que multiplica a la variable (en $5x$, el coeficiente es 5).
- **Constante:** un número sin variable (por ejemplo, el 7 en $3x + 7$).
- **Monomio:** una sola parte: número, variable o su producto ($4x^2$, $-3y$, 7).
- **Polinomio:** suma de varios monomios ($2x^2 - 5x + 3$).
- **Términos semejantes:** tienen la misma variable elevada al mismo exponente ($3x$ y $-7x$ son semejantes; $4x$ y $4x^2$ no lo son).

Valor numérico de una expresión: sustituimos la variable por un número concreto y calculamos el resultado.

Ejemplo 8.1: Calcular el valor numérico

Calcula el valor de $3x^2 - 2x + 5$ para $x = 2$.
Solución: Sustituimos x por 2 en cada lugar donde aparece:

$$3 \cdot (2)^2 - 2 \cdot (2) + 5 = 3 \cdot 4 - 4 + 5 = 12 - 4 + 5 = 13$$

El valor numérico de la expresión para $x = 2$ es **13**.

Ejemplo 8.2: Identificar partes de una expresión

En la expresión $-4x^3 + 7x - 9$:

- $-4x^3$: coeficiente -4, variable x, grado 3.
- $7x$: coeficiente 7, variable x, grado 1.
- -9: término independiente (constante).

Los términos $-4x^3$ y $7x$ **no** son semejantes (diferente exponente).

Inténtalo tú

1. Indica el coeficiente, la variable y el grado de cada monomio:

   a) $6x$ b) $-3y^2$ c) $5x^3$ d) $-x$

2. ¿Son semejantes los siguientes pares de términos?

   a) $4x$ y $-7x$ b) $3x^2$ y $3x$ c) $5y$ y $5y$

3. Calcula el valor numérico de $2x - 3$ para $x = 5$ y para $x = -1$.
4. Calcula el valor de $x^2 + 4x - 1$ para $x = 3$.
5. Una caja contiene n naranjas. Si hay 5 cajas iguales y además 3 naranjas sueltas, escribe una expresión algebraica para el total de naranjas.
6. Calcula el valor numérico de $\dfrac{2x+1}{x-1}$ para $x = 4$.

8.2 Operaciones con Expresiones Algebraicas

Suma y resta

Para sumar o restar expresiones algebraicas hay que **agrupar los términos semejantes** y operar solo con sus coeficientes.

Ejemplo 8.3: Suma de polinomios

Calcula $(3x + 2) + (5x - 7)$.
Solución: Quitamos paréntesis y agrupamos los términos semejantes (los que tienen x por un lado, las constantes por otro):

$$3x + 2 + 5x - 7 = (3x + 5x) + (2 - 7) = 8x - 5$$

Ejemplo 8.4: Resta con cambio de signo

Calcula $(3x + 2) - (x - 4)$.
¡Atención! Al quitar el paréntesis precedido de un signo menos, *todos los signos del interior cambian*:

$$3x + 2 - x + 4 = (3x - x) + (2 + 4) = 2x + 6$$

El $-(x - 4)$ se convierte en $-x + 4$.

Multiplicar una expresión por un número

Aplicamos la propiedad distributiva: multiplicamos el número por *cada* término dentro del paréntesis.

Ejemplo 8.5: Propiedad distributiva

Desarrolla $3(2x - 4)$.

$$3 \cdot (2x - 4) = 3 \cdot 2x - 3 \cdot 4 = 6x - 12$$

Ejemplo 8.6: Operación combinada

Simplifica $2(3x+1)-(4x-5)$.
Paso 1. Aplicamos la distributiva en cada paréntesis:

$$6x+2-4x+5$$

Paso 2. Agrupamos semejantes:

$$(6x-4x)+(2+5)=2x+7$$

Nota

Regla de oro: un paréntesis precedido de «$-$» equivale a multiplicar todo el paréntesis por -1. Todos los signos cambian.

Inténtalo tú

1. Simplifica agrupando términos semejantes:

   a) $5x+3x-2x$ b) $4y-y+6y$ c) $7x^2-3x^2+x^2$

2. Calcula:

   a) $(2x+5)+(3x-1)$ b) $(6x-4)+(2x+9)$

3. Calcula:

   a) $(5x+3)-(2x-1)$ b) $(4x-7)-(x+2)$

4. Aplica la distributiva:

   a) $4(x+3)$ b) $-2(3x-5)$ c) $5(2x+1)$

5. Simplifica completamente: $3(x+2)-2(x-1)$.
6. Simplifica: $4(2x-3)+(x+5)-3(x-2)$.

8.3 Ecuaciones de Primer Grado

Una **ecuación** es una igualdad que contiene una incógnita y que solo se cumple para ciertos valores de esa incógnita. Resolver la ecuación significa encontrar qué valor(es) hacen verdadera esa igualdad.

Definición 8.2: Ecuación de primer grado

Una **ecuación de primer grado** (o ecuación lineal) con incógnita x tiene la forma $ax+b=c$, donde $a\neq 0$.
La **solución** es el valor de x que hace verdadera la igualdad.
Propiedades de la igualdad (podemos hacer lo mismo a ambos lados):

- Sumar o restar el mismo número a ambos miembros.
- Multiplicar o dividir ambos miembros por el mismo número distinto de cero.

Método de resolución:

1. Quitar paréntesis (distributiva).
2. Pasar todos los términos con x al lado izquierdo y las constantes al lado derecho (cambiando de signo al cruzar el «=»).

3. Agrupar términos semejantes.
4. Dividir ambos miembros por el coeficiente de x.
5. **Verificar** sustituyendo la solución en la ecuación original.

Ejemplo 8.7: Ecuación sencilla

Resuelve $3x - 5 = 10$.
Paso 1. No hay paréntesis.
Paso 2. Pasamos el -5 al otro lado (cambia de signo):

$$3x = 10 + 5 = 15$$

Paso 3. Dividimos entre 3:

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

Verificación: $3 \cdot 5 - 5 = 15 - 5 = 10$ ✓

Ejemplo 8.8: Ecuación con incógnita en ambos miembros

Resuelve $5x + 3 = 2x + 12$.
Paso 1. Pasamos los términos con x a la izquierda y las constantes a la derecha:

$$5x - 2x = 12 - 3$$

Paso 2. Simplificamos:

$$3x = 9$$

Paso 3. Dividimos entre 3:

$$x = 3$$

Verificación: $5 \cdot 3 + 3 = 18$ y $2 \cdot 3 + 12 = 18$ ✓

Ejemplo 8.9: Ecuación con paréntesis

Resuelve $2(x + 4) = 3x - 1$.
Paso 1. Quitamos el paréntesis.

$$2x + 8 = 3x - 1$$

Paso 2. Pasamos términos:

$$2x - 3x = -1 - 8 \implies -x = -9$$

Paso 3. Multiplicamos por -1:

$$x = 9$$

Verificación: $2(9 + 4) = 2 \cdot 13 = 26$ y $3 \cdot 9 - 1 = 26$ ✓

Nota

Al «pasar un término al otro lado», en realidad estamos sumando o restando esa cantidad en ambos miembros. El resultado es que el signo cambia.

Inténtalo tú

1. Resuelve y verifica:

   a) $x + 7 = 15$ b) $x - 4 = 9$ c) $3x = 18$

2. Resuelve: $4x - 6 = 14$.
3. Resuelve: $7x + 2 = 4x + 11$.
4. Resuelve: $3x - 8 = 5x + 4$.
5. Resuelve con paréntesis: $3(x - 2) = 2(x + 1)$.
6. Resuelve: $4(2x + 1) - 3(x - 5) = 26$.
7. Resuelve: $\frac{x}{3} + 2 = 5$. (Pista: pasa el 2 al otro lado y luego multiplica por 3.)

8.4 Problemas con Ecuaciones

Las ecuaciones son una herramienta muy poderosa para resolver problemas de la vida real. El método es siempre el mismo:

1. **Definir la incógnita:** decidir qué representa x y escribirlo.
2. **Plantear la ecuación:** traducir el enunciado a lenguaje matemático.
3. **Resolver** la ecuación.
4. **Verificar y contestar:** comprobar que la solución tiene sentido y responder la pregunta del problema.

Ejemplo 8.10: Un número desconocido

«Un número aumentado en 7 es igual a 23. ¿Cuál es el número?»
Paso 1. Sea x el número desconocido.
Paso 2. Traducimos: «aumentado en 7» significa $+7$; «es igual a 23» es el signo $=$:

$$x + 7 = 23$$

Paso 3. Resolvemos:

$$x = 23 - 7 = 16$$

Paso 4. Verificamos: $16 + 7 = 23$ ✓. El número es **16**.

Ejemplo 8.11: Problema de edades

«La edad de Ana es el doble de la de su hermano. Entre los dos suman 18 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?»
Paso 1. Sea x la edad del hermano. Entonces Ana tiene $2x$ años.
Paso 2. «Entre los dos suman 18»:

$$x + 2x = 18$$

Paso 3. Resolvemos:

$$3x = 18 \implies x = 6$$

Hermano: 6 años. Ana: $2 \cdot 6 = 12$ años.
Paso 4. Verificamos: $6 + 12 = 18$ ✓.

Ejemplo 8.12: Problema de dinero

«Pedro tiene €8 más que Juan. Si entre los dos tienen €50, ¿cuánto tiene cada uno?»
Paso 1. Sea x el dinero de Juan (en euros). Pedro tiene $x + 8$.
Paso 2.

$$x + (x + 8) = 50$$

Paso 3.

$$2x + 8 = 50 \implies 2x = 42 \implies x = 21$$

Juan tiene €21 y Pedro tiene €29.
Paso 4. $21 + 29 = 50$ ✓ y $29 - 21 = 8$ ✓.

Inténtalo tú

1. El triple de un número menos 4 es igual a 20. ¿Cuál es ese número?
2. La suma de dos números consecutivos es 31. ¿Cuáles son esos números? (Pista: si el primero es n, el siguiente es $n + 1$.)
3. Un rectángulo tiene un largo que es el doble de su ancho. Si el perímetro mide 36 cm, ¿cuánto miden el largo y el ancho?
4. En una tienda, un bolígrafo cuesta €1.50 más que un lápiz. Si compras 3 bolígrafos y 2 lápices y pagas €9.50, ¿cuánto cuesta cada uno?
5. Un tren sale de la estación A a 80 km/h. Tras 2 horas, ha recorrido 160 km. Plantea una ecuación para hallar cuántas horas tardará en recorrer 240 km en total.
6. La edad de Marta dentro de 5 años será el triple de la que tenía hace 2 años. ¿Cuántos años tiene Marta ahora?
7. Entre Luis y Carlos tienen 45 cromos. Si Luis tiene 9 más que Carlos, ¿cuántos tiene cada uno?

Tema 9. Geometría Plana: Figuras y Medida

9.1 Rectas y Ángulos

Un **ángulo** se forma cuando dos rayos parten del mismo punto (el **vértice**). Lo medimos en **grados** (°).

Definición 9.1: Tipos de ángulos

- **Nulo:** 0°.
- **Agudo:** entre 0° y 90°.
- **Recto:** exactamente 90°.
- **Obtuso:** entre 90° y 180°.
- **Llano:** exactamente 180°.
- **Completo:** 360°.
- **Cóncavo:** entre 180° y 360°.

Complementarios: dos ángulos que suman 90°.
Suplementarios: dos ángulos que suman 180°.
Opuestos por el vértice: cuando dos rectas se cortan, los ángulos opuestos son *iguales*.

Rectas paralelas cortadas por una transversal. Cuando una recta cruza dos rectas paralelas aparecen varios pares de ángulos con propiedades importantes:

- **Ángulos correspondientes:** están en la misma posición relativa a la transversal. Son **iguales**.
- **Ángulos alternos internos:** están entre las paralelas, a lados opuestos de la transversal. Son **iguales**.
- **Ángulos colateros (del mismo lado):** entre las paralelas, al mismo lado de la transversal. Son **suplementarios** (suman 180°).

Ejemplo 9.1: Ángulos complementarios y suplementarios

Un ángulo mide 63°. ¿Cuánto mide su complementario y su suplementario?
Complementario: $90° - 63° = 27°$.
Suplementario: $180° - 63° = 117°$.

Ejemplo 9.2: Ángulos con rectas paralelas

Dos rectas paralelas son cortadas por una transversal. Uno de los ángulos formados mide $\alpha = 55°$. Calcula todos los ángulos distintos.
Solución:

- $\alpha = 55°$ (dado).
- Ángulo adyacente (suplementario): $180° - 55° = 125°$.
- Opuesto por el vértice de α: 55°.
- Opuesto por el vértice del adyacente: 125°.
- Por correspondencia, en la otra paralela: los mismos cuatro valores, 55° y 125°.

Nota

En cualquier figura plana, dos ángulos opuestos por el vértice son siempre iguales. Puedes comprobarlo en una hoja dibujando dos rectas que se cruzan.

Inténtalo tú

1. Clasifica cada ángulo como agudo, recto, obtuso o llano: $35°$, $90°$, $142°$, $180°$, $67°$.
2. Halla el complementario de $48°$ y el suplementario de $131°$.
3. Dos ángulos son complementarios. Uno mide $3x$ y el otro $x + 10$. Plantea una ecuación y calcula x y los dos ángulos.
4. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $72°$. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?
5. Dos rectas paralelas son cortadas por una transversal. Uno de los ángulos alternos internos mide $82°$. ¿Cuánto miden todos los ángulos que se forman?
6. Un ángulo mide el doble que su suplementario. ¿Cuánto mide cada uno?

9.2 Triángulos

Definición 9.2: Clasificación de triángulos

Por sus lados:

- **Equilátero:** los tres lados iguales (y los tres ángulos iguales, $60°$ cada uno).
- **Isósceles:** dos lados iguales (y los dos ángulos opuestos a esos lados también iguales).
- **Escaleno:** los tres lados diferentes.

Por sus ángulos:

- **Acutángulo:** los tres ángulos agudos (menores de $90°$).
- **Rectángulo:** tiene un ángulo recto ($90°$).
- **Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso (mayor de $90°$).

Suma de los ángulos interiores de un triángulo. Siempre suman $180°$. Puedes comprobarlo: recorta un triángulo de papel, dobla los tres vértices hacia el interior y quedarán alineados formando un ángulo llano.

Ejemplo 9.3: Hallar un ángulo desconocido en un triángulo

En un triángulo los ángulos miden $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$ y $\gamma =?$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \implies \gamma = 180° - 50° - 70° = 60°$$

Teorema 9.1: Teorema de Pitágoras

En un triángulo **rectángulo**, el cuadrado de la **hipotenusa** (el lado opuesto al ángulo recto, c) es igual a la suma de los cuadrados de los dos **catetos** (a y b):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ejemplo 9.4: Calcular la hipotenusa

En un triángulo rectángulo los catetos miden 3 cm y 4 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \implies c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Esta terna $(3, 4, 5)$ es la más famosa de la geometría.

Ejemplo 9.5: Calcular un cateto y verificar un triángulo rectángulo

(a) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 cm y un cateto mide 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \implies b = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

(b) ¿Es rectángulo el triángulo de lados 6, 8 y 10?

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2 \checkmark$$

Sí es rectángulo.

Área del triángulo:

$$A_\triangle = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La **altura** es la distancia perpendicular desde el vértice opuesto hasta la base (o su prolongación).

Inténtalo tú

1. En un triángulo los ángulos miden 40° y 85°. Calcula el tercer ángulo y clasifica el triángulo por sus ángulos.
2. Clasifica el triángulo de lados 5 cm, 5 cm y 7 cm por sus lados.
3. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos 6 cm y 8 cm.
4. Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de 15 cm y un cateto de 9 cm. Halla el otro cateto.
5. ¿Forma triángulo rectángulo la terna $(5, 12, 13)$? Justifica.
6. Calcula el área de un triángulo con base 10 cm y altura 6 cm.
7. Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales de 70°. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

9.3 Cuadriláteros y Polígonos

Un **cuadrilátero** es un polígono con 4 lados. La suma de sus ángulos interiores es siempre 360°.

Definición 9.3: Tipos de cuadriláteros

- **Cuadrado:** 4 lados iguales y 4 ángulos rectos.
- **Rectángulo:** 2 pares de lados iguales y 4 ángulos rectos.
- **Rombo:** 4 lados iguales, ángulos opuestos iguales (no necesariamente rectos).
- **Paralelogramo** (romboide): 2 pares de lados paralelos e iguales, ángulos opuestos iguales.
- **Trapecio:** exactamente un par de lados paralelos (llamados bases).
- **Trapezoide:** ningún lado paralelo.

Suma de ángulos interiores de un polígono de n lados:

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Un polígono **regular** tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. El ángulo interior de un polígono regular de n lados es $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Fórmulas de área:

Figura	Área	Ejemplo numérico
Cuadrado (lado l)	l^2	$l = 5$ cm $\Rightarrow A = 25$ cm^2
Rectángulo ($a \times b$)	$a \cdot b$	$a = 6,\ b = 4 \Rightarrow A = 24$ cm^2
Paralelogramo (b, h)	$b \cdot h$	$b = 8,\ h = 3 \Rightarrow A = 24$ cm^2
Rombo (diagonales d_1, d_2)	$\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$	$d_1 = 6,\ d_2 = 4 \Rightarrow A = 12$ cm^2
Trapecio (bases B, b; altura h)	$\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$	$B = 8,\ b = 4,\ h = 5 \Rightarrow A = 30$ cm^2

Ejemplo 9.6: Suma de ángulos de un hexágono

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un hexágono regular?

$$S = (6-2)\cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Cada ángulo interior mide $720^\circ/6 = 120^\circ$.

Ejemplo 9.7: Área de un trapecio

Un trapecio tiene bases de 10 cm y 6 cm, y una altura de 4 cm. Calcula su área.

$$A = \frac{(10+6)\cdot 4}{2} = \frac{16 \cdot 4}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ cm}^2$$

Inténtalo tú

1. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un pentágono? ¿Y de un octógono?
2. En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos miden x y $3x$. Plantea una ecuación (recuerda que dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios) y halla x.
3. Calcula el área de un rectángulo de 12 cm × 7 cm.
4. Calcula el área de un rombo con diagonales de 10 cm y 8 cm.
5. Un trapecio tiene bases de 14 cm y 8 cm y altura de 6 cm. ¿Cuál es su área?
6. ¿Cuánto mide el ángulo interior de un polígono regular de 9 lados?

9.4 Circunferencia y Círculo

Definición 9.4: Circunferencia y círculo

La **circunferencia** es la línea curva cuyos puntos están todos a la misma distancia (el **radio** r) de un punto central.
El **círculo** es la región plana interior a la circunferencia (incluye el borde y el interior).
Elementos principales:

- **Radio** (r): distancia del centro al borde.
- **Diámetro** ($d = 2r$): cuerda que pasa por el centro.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Arco:** parte de la circunferencia entre dos puntos.
- **Sector circular:** «porción de pizza», delimitada por dos radios y un arco.
- **Corona circular:** región entre dos circunferencias concéntricas.

Definición 9.5: Longitud y área

Con $\pi \approx 3.14159\ldots \approx 3.14$:

$$\text{Longitud de la circunferencia:} \quad L = 2\pi r = \pi d$$

$$\text{Área del círculo:} \quad A = \pi r^2$$

Para un **arco** o un **sector** de ángulo central α (en grados):

$$\text{Longitud del arco} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \qquad \text{Área del sector} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Nota

El número π es irracional: tiene infinitas cifras decimales sin repetirse. En los cálculos de clase usaremos $\pi \approx 3.14$.

Ejemplo 9.8: Longitud y área de un círculo

Calcula la longitud de la circunferencia y el área de un círculo de radio 5 cm. Usa $\pi \approx 3.14$.

$$L = 2 \cdot 3.14 \cdot 5 = 31.4 \text{ cm}$$
$$A = 3.14 \cdot 5^2 = 3.14 \cdot 25 = 78.5 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 9.9: Área de un sector circular

Calcula el área de un sector de radio 6 cm y ángulo central 90°.

Un sector de 90° es $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ del círculo completo:

$$A_{\text{sector}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 = \frac{1}{4} \cdot 3.14 \cdot 36 = \frac{113.04}{4} = 28.26 \text{ cm}^2$$

Inténtalo tú

1. Calcula la longitud y el área de un círculo de radio 3 cm.
2. El diámetro de una rueda es 70 cm. ¿Qué distancia recorre en una vuelta completa? (Calcula la longitud de la circunferencia.)
3. Calcula el área de un círculo de diámetro 12 cm.
4. Halla el área de un sector de radio 4 cm y ángulo 180°.
5. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 60° en una circunferencia de radio 9 cm.
6. Una corona circular tiene radio exterior 8 cm y radio interior 5 cm. Calcula su área. (Pista: $A_{\text{corona}} = \pi R^2 - \pi r^2$.)

9.5 Cálculo de Áreas y Perímetros

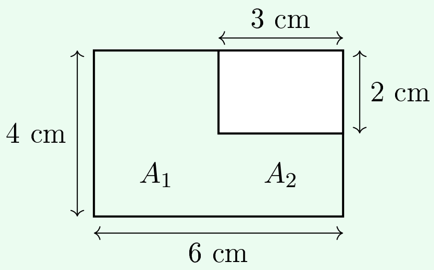
A continuación tienes un resumen de todas las fórmulas de este tema.

Figura	Perímetro	Área	Datos
Cuadrado	$4l$	l^2	lado l
Rectángulo	$2(a+b)$	$a \cdot b$	lados a, b
Triángulo	$a+b+c$	$\frac{b \cdot h}{2}$	base b, altura h
Paralelogramo	$2(a+b)$	$b \cdot h$	base b, altura h
Rombo	$4l$	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	diagonales d_1, d_2
Trapecio	$a+b+c+d$	$\frac{(B+b) \cdot h}{2}$	bases B, b; altura h
Círculo	$2\pi r$	πr^2	radio r

Figuras compuestas: para calcular el área de una figura irregular, la descomponemos en partes simples (rectángulos, triángulos, semicírculos...), calculamos cada área por separado y sumamos (o restamos si hay partes que hay que quitar).

Ejemplo 9.10: Figura en forma de L

Calcula el área de la figura en forma de «L» de la siguiente figura, donde todas las esquinas son rectas:



Método 1 — completar el rectángulo y restar:

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{\text{rectángulo grande}} - A_{\text{rectángulo quitado}} \\ &= (6 \cdot 4) - (3 \cdot 2) = 24 - 6 = 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Método 2 — dividir en dos rectángulos:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2 \quad \text{(parte izquierda)} \\ A_2 &= 3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2 \quad \text{(parte inferior derecha)} \\ A_{\text{total}} &= 12 + 6 = 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 9.11: Figura con semicírculo

Una ventana tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo en la parte superior. El rectángulo mide 4 m de ancho y 3 m de alto. El radio del semicírculo es 2 m. Calcula el área total de la ventana.

Área del rectángulo:

$$A_{\text{rect}} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$

Área del semicírculo (la mitad del círculo completo de radio 2 m):

$$A_{\text{semi}} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3.14 \cdot 4}{2} = 6.28 \text{ m}^2$$

Área total:

$$A = 12 + 6.28 = 18.28 \text{ m}^2$$

Inténtalo tú

1. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de 9 cm $\times$ 5 cm.
2. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.
3. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm y altura 6.9 cm.
4. Una figura está formada por un cuadrado de lado 6 cm al que se le ha pegado un triángulo rectángulo con catetos 6 cm y 4 cm. Calcula el área total.
5. Una piscina rectangular mide 25 m de largo y 10 m de ancho. Rodeando la piscina hay un borde de 1 m de ancho. Calcula:

   a) El área de la piscina. b) El área total (piscina + borde). c) El área solo del borde.
6. Calcula el área de la figura formada por un rectángulo de 10 cm $\times$ 6 cm al que se le ha quitado un círculo de radio 2 cm del centro.
7. Un parque tiene forma de trapecio con bases 40 m y 28 m y altura 15 m. Calcula su área.

Tema 10. Cuerpos Geométricos

Los **cuerpos geométricos** son figuras en el espacio, es decir, tienen tres dimensiones: largo, ancho y alto. A diferencia de las figuras planas, los cuerpos geométricos nos rodean en la vida cotidiana: una lata de refresco, una pelota, una caja de cereales… En este tema aprenderemos a reconocerlos, clasificarlos y calcular sus medidas.

10.1 Poliedros

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son todas planas y poligonales. Piensa en un dado de juego: tiene seis caras cuadradas, doce aristas y ocho vértices.

Definición 10.1: Poliedro y sus elementos

Un **poliedro** es un cuerpo limitado por caras planas poligonales. Sus elementos son:

- **Caras** (C): cada uno de los polígonos que forman su superficie.
- **Aristas** (A): los segmentos donde se unen dos caras.
- **Vértices** (V): los puntos donde se encuentran tres o más aristas.

Teorema 10.1: Fórmula de Euler

Para cualquier poliedro convexo se cumple:

$$C - A + V = 2$$

donde C = número de caras, A = número de aristas, V = número de vértices.

Los cinco sólidos platónicos

Los **sólidos platónicos** (o poliedros regulares) son aquellos cuyos poliedros tienen todas las caras iguales y todos los ángulos iguales. Solo existen cinco:

Nombre	**Tipo de cara**	**Caras** (C)	**Aristas** (A)	**Vértices** (V)
Tetraedro	Triángulo equilátero	4	6	4
Cubo	Cuadrado	6	12	8
Octaedro	Triángulo equilátero	8	12	6
Dodecaedro	Pentágono regular	12	30	20
Icosaedro	Triángulo equilátero	20	30	12

Nota

Puedes comprobar la fórmula de Euler en cada fila de la tabla. Por ejemplo, para el octaedro: $8 - 12 + 6 = 2$. ✓

Ejemplo 10.1: Verificación de la fórmula de Euler en el cubo

El cubo tiene $C = 6$ caras (cuadradas), $A = 12$ aristas y $V = 8$ vértices. Comprobamos:

$$C - A + V = 6 - 12 + 8 = \mathbf{2} \quad \checkmark$$

Y para el tetraedro: $C = 4$, $A = 6$, $V = 4$:

$$C - A + V = 4 - 6 + 4 = \mathbf{2} \quad \checkmark$$

La fórmula de Euler se cumple en ambos casos.

Ejemplo 10.2: Identificar caras, aristas y vértices de una casa

Imagina una casita formada por un cubo con una pirámide cuadrangular encima. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene?

Solución:

- La base del cubo: 5 caras visibles (las 4 laterales + la base inferior). La cara superior del cubo queda oculta al unirse con la pirámide, así que no conta separada.

Considerémoslo de forma sencilla contando las caras exteriores:

- Caras: 4 caras cuadradas (paredes) + 1 base + 4 caras triangulares (tejado) = 9 caras.
- Aristas: 4 aristas de la base + 4 verticales de las esquinas + 4 de la unión cubo-pirámide + 4 del tejado = 16 aristas.
- Vértices: 4 esquinas de la base + 4 de la unión + 1 cima del tejado = 9 vértices.

Comprobamos Euler: $9 - 16 + 9 = \mathbf{2}$. ✓

Inténtalo tú

1. Un prisma triangular tiene 5 caras y 6 vértices. ¿Cuántas aristas tiene? Comprueba con la fórmula de Euler.
2. Una pirámide hexagonal tiene una base hexagonal y 6 caras triangulares. Calcula el número de aristas y vértices, y verifica la fórmula de Euler.
3. ¿Cuántas aristas tiene un octaedro? Comprueba con Euler usando $C = 8$ y $V = 6$.
4. Un poliedro convexo tiene 10 caras y 15 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?
5. ¿Cuál de los sólidos platónicos tiene el mismo número de caras que de vértices? ¿Y cuál tiene el mismo número de aristas que el cubo?

10.2 Prismas y Pirámides

Definición 10.2: Prisma

Un **prisma** es un poliedro con dos bases paralelas e iguales (polígonos congruentes) unidas por caras laterales rectangulares. Se nombra por la forma de su base: prisma triangular, cuadrangular, pentagonal…
El **cubo** y el **ortoedro** (paralelepípedo rectangular, es decir, la caja) son casos especiales de prisma cuadrangular.

Definición 10.3: Pirámide

Una **pirámide** es un poliedro con una base poligonal y caras laterales triangulares que se unen en un punto llamado **ápice** o vértice superior. Se nombra por la forma de su base: pirámide triangular, cuadrangular…

Fórmulas del prisma

Sea P_b el perímetro de la base, A_b el área de la base y h la altura del prisma:

$$A_{\text{lateral}} = P_b \cdot h, \qquad A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2\,A_b, \qquad V = A_b \cdot h.$$

Fórmulas de la pirámide

Sea P_b el perímetro de la base, A_b el área de la base, h la altura y g la **apotema lateral** (distancia desde el ápice al centro de una arista de la base):

$$A_{\text{lateral}} = \frac{1}{2}\,P_b \cdot g, \qquad A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_b, \qquad V = \frac{1}{3}\,A_b \cdot h.$$

Nota

La **apotema lateral** g de una pirámide es la altura de cada cara triangular lateral, medida desde el ápice hasta el punto medio de la arista de la base. No confundas g con la altura h de la pirámide.

Ejemplo 10.3: Área y volumen de una caja rectangular

Una caja tiene largo $a = 5$ cm, ancho $b = 3$ cm y alto $h = 4$ cm. Calcula el área total y el volumen.
Datos: $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $h = 4$ cm.
Área de la base: $A_b = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$ cm^2.
Perímetro de la base: $P_b = 2(a + b) = 2(5 + 3) = 16$ cm.
Área lateral: $A_l = P_b \cdot h = 16 \cdot 4 = 64$ cm^2.
Área total: $A_t = A_l + 2\,A_b = 64 + 2 \cdot 15 = 64 + 30 = \mathbf{94}$ cm^2.
Volumen: $V = A_b \cdot h = 15 \cdot 4 = \mathbf{60}$ cm^3.

Ejemplo 10.4: Área y volumen de una pirámide cuadrangular

Una pirámide tiene base cuadrada de lado $l = 6$ cm, altura $h = 4$ cm y apotema lateral $g = 5$ cm. Calcula el área total y el volumen.
Datos: $l = 6$ cm, $h = 4$ cm, $g = 5$ cm.
Área de la base: $A_b = l^2 = 6^2 = 36$ cm^2.
Perímetro de la base: $P_b = 4 \cdot l = 4 \cdot 6 = 24$ cm.
Área lateral: $A_l = \frac{1}{2}\,P_b \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = \mathbf{60}$ cm^2
Área total: $A_t = A_l + A_b = 60 + 36 = \mathbf{96}$ cm^2.
Volumen: $V = \frac{1}{3}\,A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = \mathbf{48}$ cm^3.

Inténtalo tú

1. Un prisma triangular tiene una base triangular con base $b = 4$ cm y altura $h_t = 3$ cm, y su altura es $h = 10$ cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
2. Un cubo tiene arista de 5 cm. Calcula su área total y su volumen.
3. Una pirámide triangular regular tiene base equilátera de lado 6 cm (área de la base $= 9\sqrt{3} \approx 15.6$ cm^2), apotema lateral $g = 5$ cm y altura $h = 4$ cm. Calcula el área lateral y el volumen.
4. Una caja de cartón tiene dimensiones 30 cm $\times$ 20 cm $\times$ 15 cm. ¿Cuántos cm^2 de cartón se necesitan para fabricarla (área total)?
5. La Gran Pirámide de Giza tiene base cuadrada de lado 230 m y altura aproximada de 138 m. Si la apotema lateral es ≈ 186 m, ¿cuál es el volumen aproximado?

10.3 Cuerpos de Revolución

Los **cuerpos de revolución** se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Son figuras con superficie curva: el cilindro, el cono y la esfera son los más importantes.

Definición 10.4: Cuerpos de revolución

- **Cilindro**: se obtiene al girar un *rectángulo* alrededor de uno de sus lados. Tiene dos bases circulares iguales y una superficie lateral curva.
- **Cono**: se obtiene al girar un *triángulo rectángulo* alrededor de uno de sus catetos. Tiene una base circular y termina en un punto llamado **vértice** o ápice.
- **Esfera**: se obtiene al girar un *semicírculo* alrededor de su diámetro. No tiene bases; toda su superficie es curva.

Fórmulas del cilindro

Variables: r = radio de la base, h = altura.

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r h, \qquad A_{\text{total}} = 2\pi r\,(r+h), \qquad V = \pi r^2 h.$$

Fórmulas del cono

Variables: r = radio de la base, h = altura, g = **generatriz** (lado inclinado, desde el vértice hasta el borde de la base).

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}, \qquad A_{\text{lateral}} = \pi r g, \qquad A_{\text{total}} = \pi r\,(r+g), \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Fórmulas de la esfera

Variable: r = radio.

$$A_{\text{total}} = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Nota

En todos los cuerpos de revolución, el número $\pi \approx 3.14159\ldots$ aparece en casi todas las fórmulas. Usa $\pi \approx 3.14$ para cálculos aproximados salvo que el enunciado pida resultado exacto.

Ejemplo 10.5: Área y volumen de una lata cilíndrica

Una lata de refresco tiene radio $r = 3$ cm y altura $h = 12$ cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

Área lateral:

$$A_l = 2\pi r h = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot 12 = 72\pi \approx 226.19\ \text{cm}^2.$$

Área total:

$$A_t = 2\pi r(r+h) = 2\pi\cdot 3\cdot(3+12) = 6\pi\cdot 15 = 90\pi \approx 282.74\ \text{cm}^2.$$

Volumen:

$$V = \pi r^2 h = \pi\cdot 9\cdot 12 = 108\pi \approx 339.29\ \text{cm}^3.$$

Ejemplo 10.6: Área y volumen de un cono de helado

Un cono de helado tiene radio $r = 4$ cm y altura $h = 9$ cm.
Paso 1: calcular la generatriz.

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97} \approx 9.85 \text{ cm}.$$

Paso 2: área lateral.

$$A_l = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 9.85 = 39.4\pi \approx 123.78 \text{ cm}^2.$$

Paso 3: área total.

$$A_t = \pi r(r + g) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 9.85) = \pi \cdot 4 \cdot 13.85 \approx 174.0 \text{ cm}^2.$$

Paso 4: volumen.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 9 = 48\pi \approx 150.80 \text{ cm}^3.$$

Ejemplo 10.7: Área y volumen de una pelota

Una pelota de baloncesto tiene radio $r = 12$ cm. Calcula su superficie y su volumen.
Área:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 144 = 576\pi \approx 1809.56 \text{ cm}^2.$$

Volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1728 = 2304\pi \approx 7238.23 \text{ cm}^3.$$

Inténtalo tú

1. Un bote de pintura cilíndrico tiene radio $r = 10$ cm y altura $h = 25$ cm. Calcula el área lateral, el área total y el volumen. Expresa el resultado en cm^2 y cm^3 (usa $\pi \approx 3.14$).
2. Un cono decorativo tiene radio $r = 6$ cm y altura $h = 8$ cm. Calcula la generatriz, el área lateral y el volumen.
3. Una naranja tiene radio aproximado de $r = 4$ cm. Calcula su superficie y su volumen.
4. ¿Qué cuerpo tiene mayor volumen: un cilindro de radio 5 cm y altura 10 cm, o una esfera de radio 5 cm?
5. Un helado consiste en una bola de helado (esfera de radio 3 cm) sobre un cono de radio 3 cm y altura 10 cm. Calcula el volumen total del helado.
6. Un depósito de agua tiene forma cilíndrica con radio $r = 2$ m y altura $h = 5$ m. Si 1 m^3 = 1000 litros, ¿cuántos litros de agua puede contener?

Tema 11. Introducción a las Funciones

Las funciones son una de las herramientas más potentes de las matemáticas. Nos permiten describir cómo cambia una magnitud cuando cambia otra: la distancia recorrida según el tiempo, el precio de un producto según la cantidad comprada, la temperatura según la hora del día... En este tema aprenderemos a representar y analizar funciones.

11.1 El Plano Cartesiano

Para representar funciones gráficamente necesitamos un **sistema de referencia cartesiano**. Este sistema consiste en dos rectas numéricas perpendiculares que se cortan en un punto llamado **origen** $O = (0, 0)$.

Definición 11.1: El plano cartesiano

El **plano cartesiano** está formado por:

- **Eje de abscisas** (eje x): recta horizontal. Los valores positivos están a la derecha y los negativos a la izquierda.
- **Eje de ordenadas** (eje y): recta vertical. Los valores positivos están arriba y los negativos abajo.
- **Origen** $O = (0, 0)$: punto de intersección de ambos ejes.

Cada punto del plano se representa con un par ordenado (x, y), donde x es la **abscisa** (desplazamiento horizontal) e y es la **ordenada** (desplazamiento vertical).

Los cuatro cuadrantes

Los ejes dividen el plano en cuatro zonas llamadas **cuadrantes**:

Cuadrante	Signo de x	Signo de y
I (derecha-arriba)	$+$	$+$
II (izquierda-arriba)	$-$	$+$
III (izquierda-abajo)	$-$	$-$
IV (derecha-abajo)	$+$	$-$

Nota

Para localizar un punto (x, y): primero muévete x unidades en horizontal desde el origen, y luego y unidades en vertical. El orden importa: $(3, 5) \neq (5, 3)$.

Ejemplo 11.1: Leer y representar puntos

Indica en qué cuadrante está cada punto y describe cómo localizarlo:

- $A = (3, 5)$: 3 a la derecha, 5 arriba $\to$ **Cuadrante I**.
- $B = (-2, 4)$: 2 a la izquierda, 4 arriba $\to$ **Cuadrante II**.
- $C = (-3, -1)$: 3 a la izquierda, 1 abajo $\to$ **Cuadrante III**.
- $D = (4, -3)$: 4 a la derecha, 3 abajo $\to$ **Cuadrante IV**.
- $E = (0, 2)$: sobre el eje y (no pertenece a ningún cuadrante).
- $F = (-5, 0)$: sobre el eje x (no pertenece a ningún cuadrante).

Ejemplo 11.2: Leer coordenadas de un gráfico

En un plano cartesiano hay marcados los puntos P, Q, R. A partir de sus posiciones, leemos:

- P está 2 unidades a la derecha y 3 arriba $\Rightarrow P = (2, 3)$.
- Q está 4 unidades a la izquierda y 1 abajo $\Rightarrow Q = (-4, -1)$.
- R está sobre el eje y, 5 unidades arriba $\Rightarrow R = (0, 5)$.

Inténtalo tú

1. Localiza los siguientes puntos en un plano cartesiano e indica a qué cuadrante pertenece cada uno: $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(-3, -2)$, $D(5, -1)$, $E(0, -3)$.
2. ¿Qué coordenadas tiene un punto que está 3 unidades a la izquierda del origen y 7 unidades hacia arriba?
3. Un punto P tiene abscisa -4 y ordenada 0. ¿Sobre qué eje se encuentra?
4. Los vértices de un cuadrado son $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 4)$. Representa el cuadrado en un plano cartesiano y calcula su área.
5. ¿A qué distancia del origen está el punto $(0, 6)$? ¿Y el punto $(3, 0)$?

11.2 Concepto de Función

Imagina una máquina expendedora: pulsas el botón de "patatas fritas" y siempre te da patatas fritas, nunca otra cosa. Eso es exactamente una función: a cada entrada le corresponde *exactamente* una salida.

Definición 11.2: Función

Una **función** es una relación entre dos conjuntos (el **dominio** y el **recorrido**) que asigna a cada elemento x del dominio *exactamente un* valor y. Se escribe $y = f(x)$ y se lee "y es función de x".

- **Dominio**: conjunto de todos los valores de x que se pueden utilizar (las entradas posibles).
- **Recorrido** (o imagen): conjunto de todos los valores de y que se obtienen (las salidas posibles).
- **Variable independiente**: x (la elegimos nosotros).
- **Variable dependiente**: y (depende de x).

Las funciones se pueden representar de tres formas:

- **Fórmula algebraica**: $y = 2x + 1$. Es la forma más compacta.
- **Tabla de valores**: parejas (x, y) que cumplen la fórmula.
- **Gráfica**: representación en el plano cartesiano.

Ejemplo 11.3: Construir una tabla de valores para $y = 2x + 1$

Sustituimos distintos valores de x en la fórmula $y = 2x + 1$:

x	$y = 2x + 1$
-3	$2(-3) + 1 = -5$
-2	$2(-2) + 1 = -3$
-1	$2(-1) + 1 = -1$
0	$2(0) + 1 = 1$
1	$2(1) + 1 = 3$
2	$2(2) + 1 = 5$
3	$2(3) + 1 = 7$

El dominio son todos los números reales. El recorrido también son todos los números reales. Para cada x hay exactamente un valor de y.

Ejemplo 11.4: Una función con significado real

Un taxi cobra una bajada de bandera de 2 euros más 1.5 euros por kilómetro. Si llamamos x al número de kilómetros recorridos, el precio es $y = 1.5x + 2$.
Calculamos el precio para distintos trayectos:

x (km)	y (euros)
0	2.00
2	5.00
5	9.50
10	17.00

El dominio son los kilómetros posibles ($x \geq 0$). El recorrido son los precios posibles ($y \geq 2$).

Inténtalo tú

1. Para la función $y = 3x - 2$, calcula el valor de y cuando $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$ y $x = 5$.
2. Construye una tabla de valores para $y = x^2$ con $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
3. En una tienda, cada bolígrafo cuesta 1.20 euros. Escribe la función que da el precio total y al comprar x bolígrafos. ¿Cuánto cuestan 7 bolígrafos?
4. ¿Es posible que una función dé dos valores distintos de y para el mismo x? ¿Por qué?
5. La temperatura en grados Celsius C se convierte a Fahrenheit F con la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$. Calcula F para $C = 0$, $C = 20$ y $C = 100$.

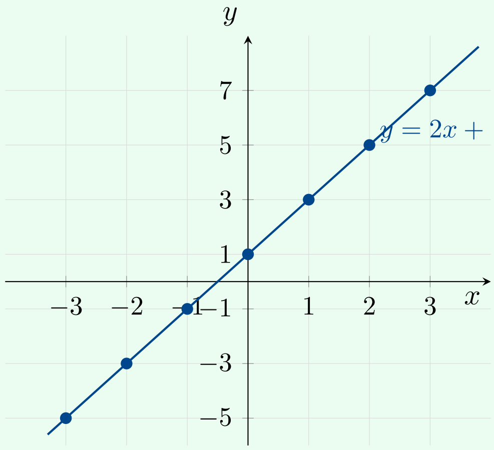
11.3 Representación Gráfica de Funciones

Para dibujar la gráfica de una función seguimos siempre estos pasos:

1. Construir una tabla de valores calculando varios pares (x, y).
2. Representar cada par como un punto en el plano cartesiano.
3. Unir los puntos con una línea suave (recta o curva).

Ejemplo 11.5: Gráfica de la función lineal $y = 2x + 1$

Usamos la tabla del ejemplo anterior. Los puntos son: $(-3, -5)$, $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$.
Al unirlos obtenemos una **línea recta**. Toda función de la forma $y = mx + n$ (función lineal o afín) tiene una gráfica rectilínea.



Observaciones: la recta corta al eje y en el punto $(0, 1)$ y al eje x en $x = -0.5$. La recta sube de izquierda a derecha (es **creciente**).

Ejemplo 11.6: Gráfica de la función proporcional $y = 3x$

Tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x$	-6	-3	0	3	6	9

Es una recta que pasa por el origen $(0, 0)$. Las funciones $y = kx$ se llaman **proporciones directas** o **funciones de proporcionalidad directa**: a mayor x, mayor y. El coeficiente $k = 3$ indica la "pendiente" o inclinación de la recta.

Inténtalo tú

1. Construye una tabla de valores y representa gráficamente $y = -x + 3$ para $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Representa gráficamente $y = 2x$ y $y = 2x + 4$ en el mismo plano. ¿Qué observas?
3. La función $y = x^2 - 1$ no es lineal. Construye su tabla de valores para $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y describe la forma de su gráfica.
4. ¿Qué tipo de gráfica tiene siempre la función $y = mx + n$? ¿Cuándo pasa por el origen?
5. Una tienda alquila bicicletas por 2 euros la hora más 1 euro de fianza. Escribe la función, construye su tabla y represéntala gráficamente.

11.4 Análisis de una Gráfica

Podemos extraer mucha información de la gráfica de una función sin necesidad de conocer su fórmula. Esto es muy útil en situaciones reales: gráficas de temperatura, velocidad, ventas...

Definición 11.3: Lectura de una gráfica

Dada la gráfica de una función $y = f(x)$:

- **Valor de y para un x dado**: localiza x en el eje horizontal, sube hasta la gráfica, y lee el valor en el eje vertical.
- **Corte con el eje y** (ordenada en el origen): el punto donde la gráfica cruza el eje y, es decir, $f(0)$.
- **Corte con el eje x** (raíz o cero): el punto(s) donde $y = 0$.
- **Intervalo creciente**: tramo donde, al aumentar x, también aumenta y (la gráfica "sube").
- **Intervalo decreciente**: tramo donde, al aumentar x, disminuye y (la gráfica "baja").
- **Máximo**: punto más alto de un intervalo (la gráfica pasa de subir a bajar).
- **Mínimo**: punto más bajo de un intervalo (la gráfica pasa de bajar a subir).

Nota

Una función es **creciente** en un intervalo si, al moverse de izquierda a derecha, la gráfica sube. Es **decreciente** si baja. Si no sube ni baja es **constante**.

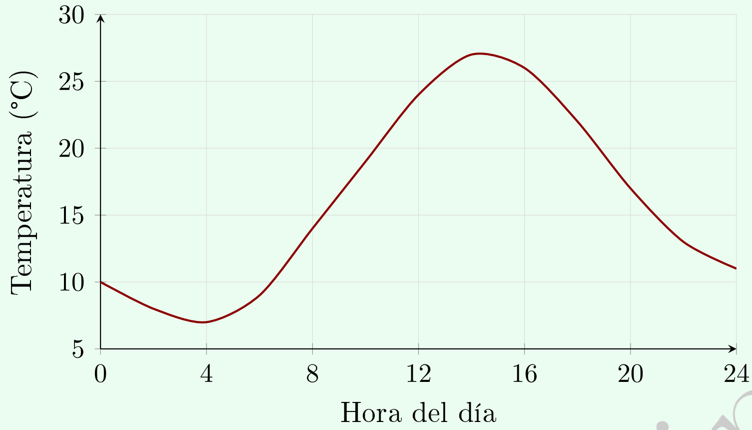
Ejemplo 11.7: Análisis de la gráfica de $y = 2x + 1$

Para la función $y = 2x + 1$ (la recta del ejemplo anterior):

- **Corte con el eje y**: cuando $x = 0$, $y = 1$. El punto es $(0, 1)$.
- **Corte con el eje x**: cuando $y = 0$: $0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} = -0.5$. El punto es $(-0.5,\ 0)$.
- **Crecimiento**: la recta es creciente en todo su dominio (siempre sube de izquierda a derecha porque la pendiente $m = 2 > 0$).
- No tiene máximos ni mínimos (es una recta infinita).

Ejemplo 11.8: Análisis de una gráfica de temperatura

La siguiente gráfica muestra la temperatura (en °C) a lo largo de un día. Analizamos sus características:



- **Mínimo**: alrededor de las 4 h, temperatura ≈ 7 °C.
- **Máximo**: alrededor de las 14 h, temperatura ≈ 27 °C.
- **Intervalo creciente**: de las 4 h a las 14 h (la temperatura sube).
- **Intervalo decreciente**: de las 14 h a las 24 h (la temperatura baja).
- A las 8 h la temperatura era aproximadamente 14 °C.

Inténtalo tú

1. Para la función $y = -x + 4$: a) calcula el corte con el eje y; b) calcula el corte con el eje x; c) indica si es creciente o decreciente.
2. Una gráfica de velocidad (en km/h) de un coche a lo largo del tiempo muestra: sube de 0 a 80 km/h durante los primeros 5 minutos, se mantiene constante en 80 km/h durante 10 minutos, y luego baja hasta 0 en 3 minutos. Describe los intervalos creciente, constante y decreciente.
3. Dada la gráfica de $y = x^2 - 4$: a) indica los cortes con el eje x; b) indica el corte con el eje y; c) ¿tiene mínimo o máximo? ¿en qué punto?
4. Una función tiene un máximo en $x = 3$ con valor $y = 10$, y es creciente para $x < 3$ y decreciente para $x > 3$. Dibuja un posible esquema de esa gráfica.
5. Observa la siguiente tabla y determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles decreciente:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	5	7	6	4	4	3

Tema 12. Estadística y Probabilidad

La **estadística** nos ayuda a recoger, organizar y entender grandes cantidades de datos. La usamos todos los días: las notas de un examen, las temperaturas de la semana, los goles marcados por un equipo… La **probabilidad** nos permite medir qué tan probable es que ocurra algo: ¿es probable que llueva mañana? ¿Qué posibilidades hay de sacar un 6 al tirar un dado?

12.1 Conceptos Básicos de Estadística

Definición 12.1: Conceptos fundamentales

- **Población**: conjunto completo de individuos u objetos que se estudia. Ejemplo: todos los alumnos de un instituto.
- **Muestra**: subconjunto representativo de la población que se analiza cuando la población es muy grande. Ejemplo: 50 alumnos elegidos al azar.
- **Variable estadística**: característica que se mide o observa en cada individuo. Ejemplo: la nota en matemáticas.

Tipos de variables estadísticas

- **Variables cuantitativas** (numéricas):
  - **Discretas**: toman valores enteros aislados. Ejemplo: número de hermanos (0, 1, 2, 3,…).
  - **Continuas**: pueden tomar cualquier valor en un intervalo. Ejemplo: altura en cm (1.72 m, 1.731 m…).
- **Variables cualitativas** (categorías): no son numéricas. Ejemplo: color de ojos (marrón, verde, azul), género, nacionalidad.

Frecuencias

Dado un conjunto de datos con n observaciones totales y un valor x_i que aparece f_i veces:

$$f_i = \text{frecuencia absoluta de } x_i \quad \text{(número de veces que aparece)},$$
$$h_i = \frac{f_i}{n} = \text{frecuencia relativa} \quad \text{(tanto por uno o porcentaje)},$$
$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \text{frecuencia acumulada}.$$

Ejemplo 12.1: Tabla de frecuencias: notas de un examen

Las notas de 20 alumnos en un examen son: 5, 7, 6, 8, 5, 9, 7, 6, 5, 8, 7, 6, 10, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 6.
Ordenamos y contamos:

Nota (x_i)	Frec. absoluta (f_i)	Frec. relativa (h_i)	Frec. acum. (F_i)
5	4	$4/20 = 0.20 = 20\,\%$	4
6	5	$5/20 = 0.25 = 25\,\%$	9
7	5	$5/20 = 0.25 = 25\,\%$	14
8	3	$3/20 = 0.15 = 15\,\%$	17
9	2	$2/20 = 0.10 = 10\,\%$	19
10	1	$1/20 = 0.05 = 5\,\%$	20
Total	**20**	$\mathbf{1.00 = 100\,\%}$	—

Comprobación: la suma de todas las frecuencias absolutas es $4+5+5+3+2+1 = 20 = n$. ✓

Ejemplo 12.2: Tabla de frecuencias: talla de zapatos

Las tallas de zapato de 10 alumnos son: 38, 40, 39, 38, 41, 40, 38, 39, 40, 42.

Talla	f_i	h_i	F_i
38	3	0.30	3
39	2	0.20	5
40	3	0.30	8
41	1	0.10	9
42	1	0.10	10
Total	10	1.00	—

Inténtalo tú

1. Clasifica cada variable como cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa: a) número de goles en un partido; b) temperatura máxima diaria; c) color favorito; d) número de libros leídos al mes; e) peso en kilogramos.
2. Las edades de 15 personas son: 12, 14, 12, 15, 13, 12, 14, 15, 13, 12, 14, 13, 15, 12, 14. Construye la tabla de frecuencias completa (f_i, h_i, F_i).
3. En una clase de 25 alumnos, 10 tienen ojos marrones, 8 azules, 5 verdes y 2 grises. Calcula las frecuencias relativas de cada color.
4. ¿Cuántos alumnos han sacado un 7 o menos en el ejemplo de las notas? Usa la frecuencia acumulada.
5. Si en un grupo de n personas, un valor aparece 3 veces y su frecuencia relativa es 0.15, ¿cuántas personas hay en total?

12.2 Gráficos Estadísticos

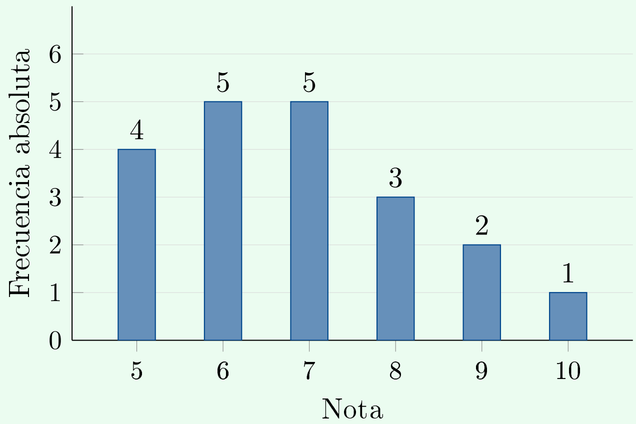
Los gráficos nos permiten visualizar los datos de forma rápida e intuitiva. Cada tipo de gráfico es más adecuado según el tipo de variable.

Definición 12.2: Tipos de gráficos estadísticos

- **Diagrama de barras**: barras verticales u horizontales cuya altura (o longitud) es proporcional a la frecuencia. Ideal para variables cualitativas o cuantitativas discretas.
- **Diagrama de sectores** (o "tarta"): un círculo dividido en sectores. El ángulo de cada sector es $\alpha_i = h_i \cdot 360°$. Muy visual para ver proporciones.
- **Histograma**: similar al diagrama de barras pero las barras se tocan entre sí. Se usa para variables continuas agrupadas en intervalos.
- **Polígono de frecuencias**: se unen con segmentos los puntos medios de la parte superior de cada barra del histograma.

Ejemplo 12.3: Diagrama de barras de las notas

Con los datos del primer ejemplo (20 alumnos y sus notas), dibujamos un diagrama de barras:



Se observa que las notas más frecuentes son el 6 y el 7, cada una con 5 alumnos.

Ejemplo 12.4: Diagrama de sectores: colores favoritos

En una encuesta a 40 alumnos, los colores favoritos son: azul (16), rojo (10), verde (8), amarillo (6). Calculamos los ángulos:

Color	f_i	h_i	$\alpha_i = h_i \cdot 360°$
Azul	16	0.40	$0.40 \times 360 = 144°$
Rojo	10	0.25	$0.25 \times 360 = 90°$
Verde	8	0.20	$0.20 \times 360 = 72°$
Amarillo	6	0.15	$0.15 \times 360 = 54°$
Total	40	1.00	360°

Con estos ángulos se dibuja el diagrama de sectores: el sector del azul ocupa 144° (casi la mitad del círculo), el rojo un cuarto (90°), etc.

Inténtalo tú

1. Con la tabla de frecuencias de las tallas de zapato del ejemplo anterior, dibuja un diagrama de barras.
2. En una clase de 30 alumnos, 12 van al colegio andando, 9 en autobús, 6 en coche y 3 en bicicleta. Calcula los ángulos del diagrama de sectores correspondiente.
3. ¿Cuándo es más apropiado usar un histograma en lugar de un diagrama de barras?
4. Una empresa vende 4 productos: A (200 unidades), B (150 unidades), C (100 unidades) y D (50 unidades). Calcula las frecuencias relativas y los ángulos del diagrama de sectores.
5. Observa un diagrama de barras de temperaturas máximas de una semana: L=22°C, M=25°C, X=23°C, J=28°C, V=30°C, S=27°C, D=20°C. ¿Qué día fue el más caluroso? ¿Y el más frío? ¿Cuántos días superaron los 25°C?

12.3 Parámetros Estadísticos

Los **parámetros estadísticos** son números que resumen las características más importantes de un conjunto de datos. Estudiaremos las **medidas de centralización** (dónde se concentran los datos) y las **medidas de dispersión** (cómo de esparcidos están).

Definición 12.3: Media, mediana, moda y rango

- **Media aritmética** ($\bar{x}$): se obtiene sumando todos los datos y dividiendo entre el número total:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_i x_i \cdot f_i}{n}.$$

- **Mediana** (M_e): valor central cuando los datos están ordenados de menor a mayor. Si hay un número par de datos, es la media de los dos centrales.
- **Moda** (M_o): valor (o valores) que aparece con más frecuencia. Puede haber ninguna moda, una o varias.
- **Rango** (R): diferencia entre el valor máximo y el mínimo. Mide cuánto se dispersan los datos:

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}.$$

Ejemplo 12.5: Cálculo completo para el conjunto $\{3, 5, 7, 5, 8, 3, 5, 9, 3, 7\}$

Datos en orden: $3, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 9$. Hay $n = 10$ datos.
Media:

$$\bar{x} = \frac{3+3+3+5+5+5+7+7+8+9}{10} = \frac{55}{10} = \mathbf{5.5}.$$

También podemos usar la tabla de frecuencias:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
3	3	9
5	3	15
7	2	14
8	1	8
9	1	9
—	10	55

$\bar{x} = 55/10 = 5.5$. ✓
Mediana: con 10 datos (número par), los dos centrales son el 5.º y el 6.º:

$$5.^{\underline{o}}\ \text{dato} = 5, \quad 6.^{\underline{o}}\ \text{dato} = 5 \quad \Rightarrow \quad M_e = \frac{5+5}{2} = \mathbf{5}.$$

Moda: los valores 3 y 5 aparecen cada uno 3 veces, que es la mayor frecuencia. La moda es $M_o = \mathbf{3}$ y $M_o = \mathbf{5}$ (distribución bimodal).
Rango: $R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} = 9 - 3 = \mathbf{6}$.

Ejemplo 12.6: Mediana con número impar de datos

Las alturas (en cm) de 7 alumnos son: 162, 175, 158, 180, 165, 171, 168.
Ordenamos: 158, 162, 165, 168, 171, 175, 180.
Con $n = 7$ (impar), el dato central es el 4.º: $M_e = \mathbf{168}$ cm.
Media: $\bar{x} = (158 + 162 + 165 + 168 + 171 + 175 + 180)/7 = 1179/7 \approx \mathbf{168.4}$ cm.
Moda: no hay ningún valor repetido, así que **no hay moda**.
Rango: $R = 180 - 158 = \mathbf{22}$ cm.

Inténtalo tú

1. Calcula la media, mediana, moda y rango del siguiente conjunto: $\{4, 6, 4, 8, 9, 6, 4, 7, 10, 8\}$.
2. Las puntuaciones de un jugador de baloncesto en 9 partidos son: 12, 8, 15, 20, 8, 18, 12, 10, 8. Calcula los cuatro parámetros.
3. La temperatura media de 5 ciudades es: 18°C, 22°C, 15°C, 25°C, 20°C. ¿Cuál es la temperatura media de las cinco ciudades juntas?
4. Un alumno tiene las siguientes notas: 7, 8, 6, 9, 7, 5, 8, 7. ¿Cuál es su nota media? ¿Cuál es la moda?
5. Si la media de los datos $\{3, 7, x, 5, 10\}$ es 6, ¿cuánto vale x?

12.4 Probabilidad

La **probabilidad** mide la posibilidad de que ocurra un determinado suceso. Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué probabilidad hay de que salga cara? Si sacamos una bola de una bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja? En esta sección aprenderemos a calcular probabilidades.

Definición 12.4: Conceptos de probabilidad

- **Experimento aleatorio**: experimento cuyo resultado no podemos predecir con certeza. Ejemplo: tirar un dado.
- **Espacio muestral** (Ω): conjunto de todos los resultados posibles. Ejemplo: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ al lanzar un dado.
- **Suceso** (A): cualquier subconjunto del espacio muestral. Ejemplo: "sacar número par" $= \{2, 4, 6\}$.
- **Suceso seguro**: siempre ocurre. $P(\Omega) = 1$.
- **Suceso imposible**: nunca ocurre. $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 12.1: Regla de Laplace

Si todos los resultados del espacio muestral son **igualmente probables**, la probabilidad del suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número total de casos posibles}}.$$

Siempre se cumple: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad de cualquier suceso está entre 0 y 1: $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$ (el suceso seguro tiene probabilidad 1).

- $P(\emptyset) = 0$ (el suceso imposible tiene probabilidad 0).
- **Suceso contrario**: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

> **Nota**
>
> La probabilidad se puede expresar como fracción, decimal o porcentaje. Por ejemplo: $P(A) = \frac{1}{6} \approx 0.167 \approx 16.7\,\%$.

Ejemplo 12.7: Probabilidades al lanzar un dado

Lanzamos un dado de 6 caras. El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con 6 resultados equiprobables.

- $P(\text{sacar un 4}) = \frac{1}{6} \approx 0.167$.
- $P(\text{sacar número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$ [casos favorables: $\{2, 4, 6\}$].
- $P(\text{sacar número mayor que 4}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ [casos: $\{5, 6\}$].
- $P(\text{sacar un 7}) = \frac{0}{6} = 0$ (imposible).
- $P(\text{sacar un número entre 1 y 6}) = \frac{6}{6} = 1$ (seguro).
- $P(\text{no sacar un 4}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Ejemplo 12.8: Bolas en una bolsa y lanzamiento de moneda

Situación 1. Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 7 bolas azules. Sacamos una bola al azar. El espacio muestral tiene $3 + 7 = 10$ bolas (todas igualmente probables).

$$P(\text{bola roja}) = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\,\%.$$

$$P(\text{bola azul}) = \frac{7}{10} = 0.7 = 70\,\%.$$

Comprobación: $0.3 + 0.7 = 1$. ✓
Situación 2. Lanzamos una moneda al aire. $\Omega = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$.

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0.5, \qquad P(\text{cruz}) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Situación 3. Una baraja española tiene 40 cartas (4 palos de 10 cartas cada uno). Sacamos una carta al azar.

$$P(\text{sacar un as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

$$P(\text{sacar una carta de oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Inténtalo tú

1. Lanzamos un dado de 6 caras. Calcula: a) P(sacar número impar); b) P(sacar número menor que 3); c) P(sacar un múltiplo de 3).
2. Una bolsa tiene 5 bolas verdes, 3 bolas amarillas y 2 bolas negras. Sacamos una al azar. Calcula la probabilidad de sacar: a) bola verde; b) bola amarilla; c) bola que no sea negra.
3. En una clase de 25 alumnos, 10 son chicos y 15 son chicas. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una chica? ¿Y de no elegir una chica?
4. Se sacan las cartas del 1 al 10 de un palo de una baraja. Se mezclan y se saca una al azar. Calcula la probabilidad de: a) sacar el número 7; b) sacar un número mayor que 6; c) sacar un número par.
5. Un semáforo está en rojo 45 segundos, en ámbar 5 segundos y en verde 30 segundos de cada ciclo de 80 segundos. Si llegamos al semáforo en un momento aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que esté en verde?

Solucionario

Los ejercicios se numeran **TN.k**: Tema N, ejercicio k (contando de forma consecutiva todos los *Inténtalo* del tema de izquierda a derecha). Las respuestas son concisas; para los cálculos intermedios consulta el texto.

Tema 1. — *Números Naturales y Sistemas de Numeración*

Inténtalo 1 — Sistema decimal

T1.1 7432: decenas (70); 38710: centenas (700); 5007: unidades (7); 700000: centenas de millar (700000); 7000000: millones (7000000).

T1.2 $4506 = 4{\cdot}1000 + 5{\cdot}100 + 0{\cdot}10 + 6$;
$83020 = 8{\cdot}10000 + 3{\cdot}1000 + 0{\cdot}100 + 2{\cdot}10 + 0$;
$305614 = 3{\cdot}100000 + 0{\cdot}10000 + 5{\cdot}1000 + 6{\cdot}100 + 1{\cdot}10 + 4$.

T1.3 50309.

T1.4 204072; 2400051.

T1.5 $9999 < 89999 < 90000 < 90001 < 100000$.

T1.6 10 veces más (el primer 5 vale 50000; el segundo 5000).

Inténtalo 2 — Operaciones

T1.7 $3847 + 5269 = 9116$; $12000 - 4385 = 7615$; $7003 - 2468 = 4535$.

T1.8 $485 \times 36 = 17460$; $724 \times 58 = 42$— $724 \times 58 = 42$: $724 \times 8 = 5792$, $724 \times 50 = 36200$, suma $= 41992$; $307 \times 45 = 13815$.

T1.9 $2573 \div 8$: cociente 321, resto 5; $1750 \div 24$: cociente 72, resto 22; $4003 \div 17$: cociente 235, resto 8.

T1.10 $8 \times 321 + 5 = 2573$ ✓; $24 \times 72 + 22 = 1750$ ✓; $17 \times 235 + 8 = 4003$ ✓.

T1.11 $3450 \div 12 = 287$ cajas completas, sobran 6 naranjas.

T1.12 $2686 \div 34 = 79$.

Inténtalo 3 — Jerarquía de operaciones

T1.13 $5 + 3 \times 4 = 17$; $20 - 2 \times (3 + 1) = 12$; $18 \div (2 + 1) + 5 = 11$.

T1.14 $2^2 + 3 \times 5 - 10 \div 2 = 4 + 15 - 5 = 14$; $(4 + 6) \div 5 + 3^2 = 2 + 9 = 11$.

T1.15 $[3 \times (5 - 2) + 1] \div 5 = 10 \div 5 = 2$; $4 + 2 \times [9 - (3 + 1)] = 4 + 2 \times 5 = 14$.

T1.16 $(3 + 4) \times 2 = 14$; $(10 - 4) \div 2 = 3$.

T1.17 $24 \div 4 \div 2 = 3$; $24 \div (4 \div 2) = 12$. No son lo mismo.

T1.18 $50 \div (10 - 5) \times 2 + 3 \times (8 - 6) = 10 \times 2 + 3 \times 2 = 20 + 6 = 26$.

Inténtalo 4 — Sistema romano

T1.19 XIV= 14; XXXIX= 39; CDXLVIII= 448; MCMXCIX= 1999; MMMDCCCLXXXVIII= 3888.

T1.20 14 = XIV; 49 = XLIX; 399 = CCCXCIX; 1999 = MCMXCIX; 2025 = MMXXV.

T1.21 2026 = MMXXVI.

T1.22 LX= 60; XCIX= 99.

T1.23 $1938 = \text{MCMXXXVIII}$; $1968 = \text{MCMLXVIII}$.

T1.24 *El sistema romano no tiene símbolo para el vacío/ninguno; sin el cero es imposible representar la ausencia de cantidad ni realizar aritmética posicional.*

Tema 2. — *Potencias y Raíces*

Inténtalo 1 — Potencias de naturales

T2.1 $4^3 = 64$; $2^7 = 128$; $5^4 = 625$; $10^5 = 100000$; $6^2 = 36$; $3^0 = 1$.

T2.2 8^4; 7^3; 10^6.

T2.3 $1^{100} = 1$; $100^1 = 100$; $100^0 = 1$.

T2.4 Cuadrados perfectos: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Cúbicos perfectos: $1, 8, 27, 64$.

T2.5 $3^4 = 81 > 4^3 = 64$; es mayor 3^4.

Inténtalo 2 — Propiedades de las potencias

T2.6 $2^5 \cdot 2^3 = 2^8 = 256$; $7^8 \div 7^5 = 7^3 = 343$; $(3^2)^4 = 3^8 = 6561$.

T2.7 $5^3 \cdot 5^0 = 5^3 = 125$; $(4^3)^2 = 4^6 = 4096$; $6^{10} \div 6^7 = 6^3 = 216$.

T2.8 $(2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$; $(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$; $(10^2)^3 = 10^6 = 1000000$.

T2.9 $10^8/10^5 = 10^3 = 1000$; $10^3 \cdot 10^4 = 10^7 = 10000000$.

T2.10 $4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$.

T2.11 *Verdad*: $3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144 = (3 \cdot 4)^2 = 12^2$. Se cumple la propiedad de potencia de un producto.

Inténtalo 3 — Notación científica

T2.12 $47000 = 4.7 \times 10^4$; $3800000 = 3.8 \times 10^6$; $560000000 = 5.6 \times 10^8$.

T2.13 $0.0072 = 7.2 \times 10^{-3}$; $0.000045 = 4.5 \times 10^{-5}$; $0.0000001 = 1 \times 10^{-7}$.

T2.14 $6.3 \times 10^4 = 63000$; $2.05 \times 10^7 = 20500000$; $1.2 \times 10^{-3} = 0.0012$.

T2.15 $300000000 = 3 \times 10^8$ m/s.

T2.16 $3.2 \times 10^6 = 3200000 > 9.9 \times 10^5 = 990000$; es mayor 3.2×10^6.

T2.17 $8.9 \times 10^2 < 4.1 \times 10^3 < 3 \times 10^4$.

Inténtalo 4 — Raíces cuadradas y cúbicas

T2.18 $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{400} = 20$.

T2.19 $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{1000} = 10$.

T2.20 $\sqrt{50}$ está entre 7 y 8 ($7^2 = 49$, $8^2 = 64$); $\sqrt{90}$ entre 9 y 10.

T2.21 Lado $= \sqrt{256} = 16$ cm.

T2.22 $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$; $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. *Mentira*: $14 \neq 10$.

T2.23 $\sqrt{26} < 5 < \sqrt{30} < 6$ ($\sqrt{26} \approx 5.1$, $\sqrt{30} \approx 5.5$).

Tema 3. — *Divisibilidad*

Inténtalo 1 — Divisores y múltiplos

T3.1 Divisores de 18: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; de 30: $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; de 36: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$; de 100: $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

T3.2 Múltiplos de 4: $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32$; de 9: $9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72$; de 11: $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88$; de 25: $25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200$.

T3.3 $91 \div 7 = 13$ (exacta): *sí*. $50 \div 6 = 8$ resto 2: *no*.

T3.4 $40 = 5 \times 8$ $\checkmark$; $52 = 6 \times 8 + 4$ $\times$; $64 = 8 \times 8$ $\checkmark$; $78 = 9 \times 8 + 6$ $\times$; $96 = 12 \times 8$ $\checkmark$.

T3.5 *Un cuadrado de un primo*: $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$ tienen exactamente 3 divisores: 1, el primo y su cuadrado.

T3.6 Divisores de 48: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Hay 10 formas.

Inténtalo 2 — Criterios de divisibilidad

T3.7 135: 3 $\checkmark$(suma= 9), 5 $\checkmark$, 9 $\checkmark$; no por 2, 10. 720: 2,3,5,9,10 todos $\checkmark$. 1234: 2 $\checkmark$; no por 3 (suma= 10), 5, 9, 10. 4095: 3 $\checkmark$(suma= 18), 5 $\checkmark$, 9 $\checkmark$; no por 2, 10.

T3.8 48: par y suma= 12 div. por 3 $\Rightarrow$ div. por 6 $\checkmark$. 74: par pero $7 + 4 = 11$ no div. por 3 $\times$. 126: par y suma= 9 $\checkmark$. 315: no es par $\times$.

T3.9 Mayor de tres cifras divisible entre 9: 999 $(9 + 9 + 9 = 27)$.

T3.10 $2 + 6 + 7 + 3 = 18$ div. por 3 $\checkmark$. $18 \div 9 = 2$ $\checkmark$; por tanto 2673 es div. por 3 y por 9.

T3.11 506: posiciones impares (der.): $6 + 5 = 11$; pares: 0. Diferencia $= 11$, múltiplo de 11 $\checkmark$. $506 \div 11 = 46$ $\checkmark$.

T3.12 Termina en 0: div. por 2 $\checkmark$, 5 $\checkmark$, 10 $\checkmark$. Suma de cifras $= 12$: div. por 3 $\checkmark$; 12 no es múltiplo de 9: *no* div. por 9.

Inténtalo 3 — Primos y compuestos

T3.13 $27 = 3^3$ (compuesto); 31 (primo); $51 = 3\times17$ (compuesto); 53 (primo); $91 = 7\times13$ (compuesto); 97 (primo).

T3.14 $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $500 = 2^2 \cdot 5^3$.

T3.15 $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ divisores.

T3.16 $41, 43, 47, 53, 59$.

T3.17 $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$. Ningún par de factores primos da 48 (2×24, el 24 no es primo; etc.); de hecho 48 no se puede escribir como producto de exactamente dos primos.

T3.18 $30 = 2 \times 3 \times 5$; divisores: $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ — 8 formas de hacer grupos iguales.

Inténtalo 4 — MCD y MCM

T3.19 $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$. $\text{mcd}(15, 20) = 5$; $\text{mcm}(15, 20) = 60$.

T3.20 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$. $\text{mcd}(30, 45) = 15$; $\text{mcm}(30, 45) = 90$.

T3.21 $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$. $\text{mcd}(8, 12, 18) = 2$; $\text{mcm}(8, 12, 18) = 72$.

T3.22 $\text{mcd}(84, 60)$: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. $\text{mcd} = 2^2 \cdot 3 = 12$ cm.

T3.23 mcm$(6, 8, 12)$: $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$. mcm $= 2^3 \cdot 3 = 24$ días.

T3.24 $12 = 2^2 \cdot 3$, $20 = 2^2 \cdot 5$. mcd $= 4$, mcm $= 60$. $4 \times 60 = 240 = 12 \times 20$ ✓.

Tema 4. — *Números Enteros*

Inténtalo 1 — El conjunto $\mathbb{Z}$

T4.1 a) -15; b) $+200$; c) -7; d) -3.

T4.2 $-3 < 2$; $-7 < -5$; $0 > -1$; $-4 = -4$.

T4.3 Mayor a menor: $5, 3, 0, -1, -6, -8$.

T4.4 $-2 - 3 = -5$.

T4.5 De menor a mayor: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Inténtalo 2 — Valor absoluto

T4.6 $|-12| = 12$; $|8| = 8$; $|-1| = 1$; $|0| = 0$; $-|-6| = -6$.

T4.7 -7 y 7; -3 y 3.

T4.8 a) $|2 - 9| = 7$; b) $|-5 - 3| = 8$; c) $|-6 - (-1)| = 5$; d) $|-4 - 4| = 8$

T4.9 $|-2| = 2 < |3| = 3 < |-6| = 6 < |7| = 7 < |-10| = 10$.

T4.10 $x = 5$ o $x = -5$.

Inténtalo 3 — Suma y resta de enteros

T4.11 $(-5) + (-3) = -8$; $(-8) + 2 = -6$; $4 + (-9) = -5$; $(-1) + 1 = 0$.

T4.12 $7 - (-3) = 10$; $(-4) - (-6) = 2$; $0 - (-5) = 5$; $(-2) - (-2) = 0$.

T4.13 $(-3) + (-5) - (-2) = -6$; $8 - 3 + (-6) = -1$; $(-7) + 4 - (-1) = -2$.

T4.14 $-80 + 35 = -45$ m.

T4.15 $3 - 10 = -7\,°$C.

T4.16 $(-12) + 7 - (-4) + (-3) - 5 = -12 + 7 + 4 - 3 - 5 = -9$.

Inténtalo 4 — Multiplicación y división

T4.17 $(-3) \cdot 8 = -24$; $(-7) \cdot (-5) = 35$; $4 \cdot (-9) = -36$; $(-1) \cdot (-1) = 1$.

T4.18 $(-24) \div 6 = -4$; $(-30) \div (-5) = 6$; $16 \div (-4) = -4$; $(-45) \div (-9) = 5$.

T4.19 $(-4)^2 = 16$; $(-2)^4 = 16$; $(-3)^3 = -27$; $(-5)^2 = 25$; $(-1)^{11} = -1$.

T4.20 $(-2)^6$ es positivo (exp. par); $(-3)^5$ es negativo (exp. impar). Positivo $\times$ negativo = *negativo.*

T4.21 $(-2)(-3)(-1)(4) = -24$; $(-5)^2 \div (-5) = 25 \div (-5) = -5$; $(-2)^3 \cdot (-3)^2 = (-8) \cdot 9 = -72$.

T4.22 $6 \times (-1500) = -9000$ euros.

Tema 5. — *Números Decimales y Sistema Métrico Decimal*

Inténtalo 1 — Lectura y escritura

T5.1 3.5: tres coma cinco; 0.07: cero coma cero siete; 12.304: doce coma trescientos cuatro; 100.010: cien coma cero diez.

T5.2 8.502; 0.006; 23.4.

T5.3 4.1: unidades (4); 0.04: centésimas (0.04); 2.400: décimas (0.4, i.e. valor de la cifra 4 en décimas); 3.004: milésimas (0.004).

T5.4 $7.53 = 7 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$; $0.608 = \frac{6}{10} + \frac{0}{100} + \frac{8}{1000}$; $2.070 = 2 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{0}{1000}$.

T5.5 De menor a mayor por valor posicional en 6.382: milésimas (2) $<$ centésimas (8) $<$ décimas (3). Pero por valor real: $0.002 < 0.08 < 0.3$.

Inténtalo 2 — Tipos de decimales

T5.6 1.6: exacto; $0.\overline{4}$: periódico puro; $2.3\overline{1}$: periódico mixto; π: irracional; 0.125: exacto; $\sqrt{5}$: irracional.

T5.7 $5 \div 6 = 0.8333\ldots = 0.8\overline{3}$: periódico mixto.

T5.8 $7 \div 8 = 0.875$: exacto.

T5.9 Mayor a menor: $0.\overline{6} = 0.666\ldots > 0.66 > 0.61 > 0.6$.

T5.10 *Respuesta libre.* Ejemplo: exacto 0.5; periódico puro $0.\overline{3}$; periódico mixto $0.1\overline{6}$; irracional $\sqrt{2}$.

Inténtalo 3 — Operaciones con decimales

T5.11 $5.3 + 0.47 + 12.005 = 17.775$; $8.2 - 3.145 = 5.055$.

T5.12 $3.5 \times 2.4 = 8.4$; $0.12 \times 0.5 = 0.06$; $1.5 \times 1.5 = 2.25$.

T5.13 $6.48 \div 3 = 2.16$; $9.35 \div 5 = 1.87$; $0.84 \div 4 = 0.21$.

T5.14 7.384 a décimas: 7.4; a centésimas: 7.38.

T5.15 0.995 a décimas: 1.0.

T5.16 $4 \times 2.35 = 9.4$ kg.

Inténtalo 4 — Sistema Métrico Decimal

T5.17 2 km= 2000 m; 3.5 hm= 350 m; 800 cm= 8 m; 55 mm= 0.055 m.

T5.18 3 m= 300 cm; 1.5 dm= 15 cm; 0.4 m= 40 cm.

T5.19 3500 g= 3.5 kg; 250 g= 0.25 kg; 7000 g= 7 kg.

T5.20 3000 ml= 3 l; 250 cl= 2.5 l; 0.5 kl= 500 l.

T5.21 $10 \times 25 = 250$ m= 0.25 km.

T5.22 $1.25 \times 1000 = 1250$ g.

Tema 6. — *Fracciones*

Inténtalo 1 — Concepto de fracción

T6.1 $\frac{3}{7}$: propia; $\frac{9}{4}$: impropia; $1\frac{2}{3}$: número mixto; $\frac{5}{5}$: impropia ($= 1$); $\frac{2}{11}$: propia.

T6.2 Equivalentes a $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$. A $\frac{3}{4}$: $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$. A $\frac{5}{2}$: $\frac{10}{4}, \frac{15}{6}, \frac{20}{8}$.

T6.3 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$; $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$; $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

T6.4 $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$; $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$; $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$.

T6.5 $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$.

Inténtalo 2 — Comparación y ordenación

T6.6 $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ (mismo denom.); $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ $(8/12 < 9/12)$; $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$ $(15/18 > 14/18)$.

T6.7 $\mathrm{mcm}(4,3,6) = 12$: $\frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{6}{12}$, es decir $\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

T6.8 $\mathrm{mcm}(6,4,8) = 24$: $\frac{20}{24} > \frac{18}{24} > \frac{21}{24}$ — orden: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$.

T6.9 $\frac{9}{10}$ (la más cercana a 1, ya que $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{6}$).

T6.10 $\mathrm{mcm}(5,7,3,9) = 315$: $\frac{126}{315}, \frac{135}{315}, \frac{105}{315}, \frac{140}{315}$. Orden: $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$.

Inténtalo 3 — Operaciones con fracciones

T6.11 $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

T6.12 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$; $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

T6.13 $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$.

T6.14 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2$; $\frac{5}{6} \div \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$; $\frac{2}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

T6.15 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ taza.

T6.16 Jerarquía: primero $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; luego $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Inténtalo 4 — Fracciones y decimales

T6.17 $\frac{3}{5} = 0.6$; $\frac{7}{4} = 1.75$; $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$; $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$.

T6.18 $0.5 = \frac{1}{2}$; $0.4 = \frac{2}{5}$; $0.625 = \frac{5}{8}$; $0.12 = \frac{3}{25}$.

T6.19 $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$; $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$; $0.\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

T6.20 $\frac{7}{9} = 0.\overline{7} = 0.777\ldots > 0.78$. Es mayor $\frac{7}{9}$.

T6.21 $\frac{1}{4} = 0.25 = 0.25$; orden: $0.25 = \frac{1}{4} < 0.25\ldots$ ambos son iguales! Más exacto: $0.25 < 0.3 < \frac{1}{3} \approx 0.333$. Orden: $\frac{1}{4} = 0.25 < 0.3 < \frac{1}{3}$.

T6.22 $\frac{7}{10} \times 30 = 21$ preguntas; $0.7 \times 30 = 21$.

Tema 7. — *Proporcionalidad y Porcentajes*

Inténtalo 1 — Razón y proporción

T7.1 a) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$; c) $\frac{40}{64} = \frac{5}{8}$.

T7.2 $5 \times 24 = 120$ y $8 \times 15 = 120$ ✓. Sí forman proporción.

T7.3 a) $4 \times 10 = 8x \Rightarrow x = 5$; b) $18x = 54 \Rightarrow x = 3$; c) $7 \times 6 = 14x \Rightarrow x = 3$.

T7.4 $\frac{3}{200} = \frac{x}{600} \Rightarrow x = 9$ huevos.

T7.5 4 cm $\times$ 50000 = 200000 cm = 2 km.

T7.6 Razón verde:rojo = 45:30 = 3:2.

Inténtalo 2 — Proporcionalidad directa

T7.7 $k = 12 \div 4 = 3$ l/min; $10 \times 3 = 30$ l.

T7.8 $k = 2.40 \div 6 = 0.40$ €/lápiz; $15 \times 0.40 = 6$ €.

T7.9 $k = 450 \div 9 = 50$ piezas/h; $12 \times 50 = 600$ piezas.

T7.10 $k = 8 \div 100 = 0.08$ l/km; $350 \times 0.08 = 28$ l.

T7.11 $k = 6 \div 2 = 3$. Tabla: $x = 5 \to y = 15$; $x = 8 \to y = 24$; $x = 10 \to y = 30$.

T7.12 $k = 7.50 \div 2.5 = 3$ €/m; $4 \times 3 = 12$ €.

Inténtalo 3 — Proporcionalidad inversa

T7.13 $k = 5 \times 4 = 20$ (máquinas×horas); $10 \times t = 20 \Rightarrow t = 2$ horas.

T7.14 $k = 6 \times 8 = 48$; $4 \times t = 48 \Rightarrow t = 12$ horas.

T7.15 $k = 1 \times 12 = 12$; $3 \times t = 12 \Rightarrow t = 4$ horas.

T7.16 $k = 3 \times 100 = 300$ km; $2 \times v = 300 \Rightarrow v = 150$ km/h.

T7.17 $k = 2 \times 24 = 48$. Tabla: $x = 4 \to y = 12$; $x = 6 \to y = 8$; $x = 12 \to y = 4$.

T7.18 $k = 3 \times 10 = 30$; $n \times 5 = 30 \Rightarrow n = 6$ obreros.

Inténtalo 4 — Porcentajes

T7.19 a) $\frac{20}{100} \times 350 = 70$; b) $\frac{7}{100} \times 400 = 28$; c) $\frac{3.5}{100} \times 600 = 21$.

T7.20 $\frac{18}{72} \times 100 = 25\,\%$; $\frac{15}{60} \times 100 = 25\,\%$.

T7.21 $\frac{28}{40} \times 100 = 70\,\%$.

T7.22 $360 \times 0.85 = 306$ €.

T7.23 $25 \times 1.10 = 27.50$ €.

T7.24 $30 \times 0.40 = 12$ alumnos.

T7.25 $\frac{35}{100} \times A = 63 \Rightarrow A = 180$.

T7.26 $P \times 0.80 = 48 \Rightarrow P = 60$ €.

Tema 8. — *Álgebra y Ecuaciones de Primer Grado*

Inténtalo 1 — Expresiones algebraicas

T8.1 a) coef. 6, var. x, grado 1; b) coef. -3, var. y, grado 2; c) coef. 5, var. x, grado 3; d) coef. -1, var. x, grado 1.

T8.2 a) Sí ($4x$ y $-7x$); b) No (distinto exponente); c) Sí.

T8.3 $x = 5$: $2(5) - 3 = 7$; $x = -1$: $2(-1) - 3 = -5$.

T8.4 $3^2 + 4(3) - 1 = 9 + 12 - 1 = 20$.

T8.5 $5n + 3$.

T8.6 $\frac{2(4)+1}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$.

Inténtalo 2 — Operaciones con expresiones

T8.7 a) $6x$; b) $9y$; c) $5x^2$.

T8.8 a) $5x + 4$; b) $8x + 5$.

T8.9 a) $3x + 4$; b) $3x - 9$.

T8.10 a) $4x + 12$; b) $-6x + 10$; c) $10x + 5$.

T8.11 $3x + 6 - 2x + 2 = x + 8$.

T8.12 $8x - 12 + x + 5 - 3x + 6 = 6x - 1$.

Inténtalo 3 — Ecuaciones de primer grado

T8.13 a) $x = 8$; b) $x = 13$; c) $x = 6$.

T8.14 $4x = 20 \Rightarrow x = 5$.

T8.15 $3x = 9 \Rightarrow x = 3$.

T8.16 $-2x = 12 \Rightarrow x = -6$.

T8.17 $3x - 6 = 2x + 2 \Rightarrow x = 8$.

T8.18 $8x + 4 - 3x + 15 = 26 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = 1.4$.

T8.19 $\frac{x}{3} = 3 \Rightarrow x = 9$.

Inténtalo 4 — Problemas con ecuaciones

T8.20 $3x - 4 = 20 \Rightarrow x = 8$.

T8.21 $n + (n + 1) = 31 \Rightarrow n = 15$; los números son 15 y 16.

T8.22 Ancho $= a$, largo $= 2a$. $2(a + 2a) = 36 \Rightarrow a = 6$ cm, largo $= 12$ cm.

T8.23 Lápiz $= l$, bolígrafo $= l + 1.5$. $3(l + 1.5) + 2l = 9.5 \Rightarrow 5l = 5 \Rightarrow l = 1$ €; bolígrafo $= 2.5$ €.

T8.24 $80t = 240 \Rightarrow t = 3$ h en total; ya lleva 2 h, así que tarda 1 hora más.

T8.25 Edad actual $= x$. $(x + 5) = 3(x - 2) \Rightarrow x + 5 = 3x - 6 \Rightarrow 11 = 2x \Rightarrow x = 5.5$. *Marta tiene 5 años y medio* (o $\frac{11}{2}$ años).

T8.26 $x + (x + 9) = 45 \Rightarrow x = 18$; Carlos 18, Luis 27.

Tema 9. — *Geometría Plana: Figuras y Medida*

Inténtalo 1 — Rectas y ángulos

T9.1 35°: agudo; 90°: recto; 142°: obtuso; 180°: llano; 67°: agudo.

T9.2 Complementario de $48° = 42°$; suplementario de $131° = 49°$.

T9.3 $3x + x + 10 = 90 \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20$; ángulos: 60° y 30°.

T9.4 72°, 108°, 72°, 108°.

T9.5 Alternos internos 82° y 82°; adyacentes 98° y 98° (los cuatro ángulos son 82°, 98°, 82°, 98° en cada vértice).

T9.6 $\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$ y $2\alpha = 120°$.

Inténtalo 2 — Triángulos

T9.7 Tercer ángulo $= 180 - 40 - 85 = 55°$. Todos agudos: *acutángulo*.

T9.8 Dos lados iguales ($5 = 5$): *isósceles*.

T9.9 $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.

T9.10 $b = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.

T9.11 $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ ✓. Sí es rectángulo.

T9.12 $A = \frac{10\times6}{2} = 30$ cm^2.

T9.13 $180 - 70 - 70 = 40°$.

Inténtalo 3 — Cuadriláteros y polígonos

T9.14 Pentágono: $(5-2)\times180 = 540°$; octógono: $(8-2)\times180 = 1080°$.

T9.15 $x + 3x = 180 \Rightarrow x = 45°$.

T9.16 $A = 12 \times 7 = 84$ cm^2.

T9.17 $A = \frac{10\times8}{2} = 40$ cm^2.

T9.18 $A = \frac{(14+8)\times6}{2} = 66$ cm^2.

T9.19 $\frac{(9-2)\times180}{9} = 140°$.

Inténtalo 4 — Circunferencia y círculo

T9.20 $L = 2\pi \times 3 \approx 18.85$ cm; $A = \pi \times 9 \approx 28.27$ cm^2.

T9.21 $L = \pi \times 70 \approx 219.91$ cm ≈ 2.20 m.

T9.22 $r = 6$; $A = \pi \times 36 \approx 113.10$ cm^2.

T9.23 Sector $180° = \frac{1}{2}$ círculo: $A = \frac{1}{2}\pi \times 16 \approx 25.13$ cm^2.

T9.24 $L = \frac{60}{360} \times 2\pi \times 9 = 3\pi \approx 9.42$ cm.

T9.25 $A = \pi(8^2 - 5^2) = \pi \times 39 \approx 122.52$ cm^2.

Inténtalo 5 — Áreas y perímetros

T9.26 $A = 9 \times 5 = 45$ cm^2; $P = 2(9+5) = 28$ cm.

T9.27 $A = 7^2 = 49$ cm^2; $P = 4 \times 7 = 28$ cm.

T9.28 $A = \frac{8 \times 6.9}{2} = 27.6$ cm^2.

T9.29 $A_{\text{cuad}} = 36$ cm^2; $A_{\triangle} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$ cm^2; total $= 48$ cm^2.

T9.30 a) $25 \times 10 = 250$ m^2; b) $(25+2) \times (10+2) = 27 \times 12 = 324$ m^2; c) $324 - 250 = 74$ m^2.

T9.31 $A_{\text{rect}} - A_{\text{círc}} = 10 \times 6 - \pi \times 4 \approx 60 - 12.57 = 47.43$ cm^2.

T9.32 $A = \frac{(40+28) \times 15}{2} = 510$ m^2.

Tema 10. — *Cuerpos Geométricos*

Inténtalo 1 — Poliedros

T10.1 $C - A + V = 2 \Rightarrow 5 - A + 6 = 2 \Rightarrow A = 9$. (Prisma triangular: 5 caras, 6 vértices, 9 aristas.) ✓

T10.2 Pirámide hexagonal: $C = 7$ (1 base + 6 triángulos), $V = 7$ (6 base + 1 ápice). $A = 7-2+7 = 12$ aristas. Comprobación: $7 - 12 + 7 = 2$ ✓.

T10.3 Octaedro: $C = 8$, $V = 6$. $A = 8 + 6 - 2 = 12$ ✓.

T10.4 $C - A + V = 2 \Rightarrow 10 - 15 + V = 2 \Rightarrow V = 7$.

T10.5 Tetraedro: $C = V = 4$. Octaedro y cubo tienen ambos 12 aristas.

Inténtalo 2 — Prismas y pirámides

T10.6 $A_b = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ cm^2; $P_b = 4+3+5 = 12$ cm; $A_l = 12 \times 10 = 120$ cm^2; $A_t = 120 + 2 \times 6 = 132$ cm^2; $V = 6 \times 10 = 60$ cm^3.

T10.7 $A_t = 6 \times 5^2 = 150$ cm^2; $V = 5^3 = 125$ cm^3.

T10.8 $P_b = 3 \times 6 = 18$ cm; $A_l = \frac{1}{2} \times 18 \times 5 = 45$ cm^2; $V = \frac{1}{3} \times 15.6 \times 4 \approx 20.8$ cm^3.

T10.9 $A_t = 2(30 \times 20 + 30 \times 15 + 20 \times 15) = 2(600 + 450 + 300) = 2700$ cm^2.

T10.10 $V = \frac{1}{3} \times 230^2 \times 138 = \frac{1}{3} \times 52900 \times 138 \approx 2432600$ m^3.

Inténtalo 3 — Cuerpos de revolución

T10.11 $A_l = 2\pi \times 10 \times 25 \approx 1570$ cm^2; $A_t = 2\pi \times 10 \times 35 \approx 2198$ cm^2; $V = \pi \times 100 \times 25 \approx 7854$ cm^3.

T10.12 $g = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm; $A_l = \pi \times 6 \times 10 \approx 188.5$ cm^2; $V = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times 8 \approx 301.6$ cm^3.

T10.13 $A = 4\pi \times 16 \approx 201.1$ cm^2; $V = \frac{4}{3}\pi \times 64 \approx 268.1$ cm^3.

T10.14 Cilindro: $V = \pi \times 25 \times 10 \approx 785.4$ cm^3; Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi \times 125 \approx 523.6$ cm^3. *Mayor el cilindro.*

T10.15 $V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi \times 27 \approx 113.1$ cm^3; $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 10 \approx 94.2$ cm^3; total ≈ 207.3 cm^3.

T10.16 $V = \pi \times 4 \times 5 \approx 62.83$ m^3 ≈ 62830 litros.

Tema 11. — *Introducción a las Funciones*

Inténtalo 1 — El plano cartesiano

T11.1 $A(2,3)$: cuadrante I; $B(-1,4)$: II; $C(-3,-2)$: III; $D(5,-1)$: IV; $E(0,-3)$: eje y (sin cuadrante).

T11.2 $(-3,7)$.

T11.3 Sobre el eje x (abscisas).

T11.4 Lado $= 4-1 = 3$; $A = 3^2 = 9$ unidades^2.

T11.5 $(0,6)$: distancia 6; $(3,0)$: distancia 3.

Inténtalo 2 — Concepto de función

T11.6 $x=0 \to y=-2$; $x=2 \to y=4$; $x=-1 \to y=-5$; $x=5 \to y=13$.

T11.7 x:$-3,-2,-1,0,1,2,3 \to y$:$9,4,1,0,1,4,9$.

T11.8 $y = 1.20x$; 7 bolígrafos = 8.40 €.

T11.9 *No*: por definición una función asigna exactamente un valor de y para cada x.

T11.10 $C=0 \to F=32$; $C=20 \to F=68$; $C=100 \to F=212$.

Inténtalo 3 — Representación gráfica

T11.11 $y=-x+3$: puntos $(-2,5),(-1,4),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(4,-1)$. Recta decreciente.

T11.12 Ambas rectas tienen la misma pendiente ($m=2$) y son *paralelas*; $y=2x+4$ está desplazada 4 unidades hacia arriba.

T11.13 $y=x^2-1$: puntos $(\pm3,8),(\pm2,3),(\pm1,0),(0,-1)$. Parábola con mínimo en $(0,-1)$.

T11.14 Siempre una *línea recta*. Pasa por el origen cuando $n=0$.

T11.15 $y=2x+1$; tabla: $x=0 \to 1$, $x=1 \to 3$, $x=2 \to 5$, $x=3 \to 7$; recta creciente.

Inténtalo 4 — Análisis de una gráfica

T11.16 a) Corte eje y: $(0,4)$; b) Corte eje x: $x=4$, punto $(4,0)$; c) *Decreciente* (pendiente $m=-1<0$).

T11.17 Creciente: 0–5 min; constante: 5–15 min; decreciente: 15–18 min.

T11.18 a) Cortes eje x: $x^2-4 \Rightarrow x=\pm2$; b) Corte eje y: $(0,-4)$; c) Mínimo en $(0,-4)$.

T11.19 *Gráfica libre*: curva que sube hasta $(3,10)$ y luego baja.

T11.20 Creciente: $x\in[0,2]$ (y pasa de 2 a 7); decreciente: $x\in[2,6]$ (y baja de 7 a 3; entre $x=4$ y $x=5$ es constante en 4).

Tema 12. — *Estadística y Probabilidad*

Inténtalo 1 — Conceptos básicos de estadística

T12.1 a) Cuant. discreta; b) Cuant. continua; c) Cualitativa; d) Cuant. discreta; e) Cuant. continua.

T12.2 Datos ordenados: 12(×5), 13(×3), 14(×4), 15(×3). Tabla: f_i: 5,3,4,3; h_i: 1/3, 1/5, 4/15, 1/5; F_i: 5,8,12,15.

T12.3 Marrones: $10/25 = 0.40$; azules: $8/25 = 0.32$; verdes: $5/25 = 0.20$; grises: $2/25 = 0.08$.

T12.4 $F_i(7) = 14$ alumnos han sacado ≤ 7.

T12.5 $h_i = 6/n = 0.15 \Rightarrow n = 40$.

Inténtalo 2 — Gráficos estadísticos

T12.6 *Diagrama de barras con alturas: 3, 2, 3, 1, 1 para tallas 38–42 respectivamente.*

T12.7 Andando: $\frac{12}{30} \times 360 = 144°$; autobús: 108°; coche: 72°; bici: 36°.

T12.8 *El histograma se usa cuando los datos son continuos o están agrupados en intervalos; el diagrama de barras cuando los datos son discretos o cualitativos.*

T12.9 Total: 500 uds. A: $200/500 = 0.40$, 144°; B: 0.30, 108°; C: 0.20, 72°; D: 0.10, 36°.

T12.10 Más caluroso: V (30°C); más frío: D (20°C); días > 25C: J, V, S (3 días).

Inténtalo 3 — Parámetros estadísticos

T12.11 Datos ordenados: $4, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10$. $\bar{x} = (4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10)/10 = 66/10 = 6.6$; $M_e = (6 + 7)/2 = 6.5$; $M_o = 4$; $R = 10 - 4 = 6$.

T12.12 Datos ordenados: $8, 8, 8, 10, 12, 12, 15, 18, 20$. $\bar{x} = 111/9 \approx 12.3$; $M_e = 12$; $M_o = 8$; $R = 20 - 8 = 12$.

T12.13 $\bar{x} = (18 + 22 + 15 + 25 + 20)/5 = 100/5 = 20$°C.

T12.14 $\bar{x} = (7 + 8 + 6 + 9 + 7 + 5 + 8 + 7)/8 = 57/8 = 7.125$; $M_o = 7$.

T12.15 $(3 + 7 + x + 5 + 10)/5 = 6 \Rightarrow 25 + x = 30 \Rightarrow x = 5$.

Inténtalo 4 — Probabilidad

T12.16 a) $P(\text{impar}) = 3/6 = 1/2$; b) $P(< 3) = 2/6 = 1/3$; c) $P(\text{múltiplo de 3}) = 2/6 = 1/3$.

T12.17 Total 10 bolas. a) $P(\text{verde}) = 5/10 = 1/2$; b) $P(\text{amarilla}) = 3/10$; c) $P(\text{no negra}) = 8/10 = 4/5$.

T12.18 $P(\text{chica}) = 15/25 = 3/5$; $P(\text{no chica}) = 2/5$.

T12.19 a) $P(7) = 1/10$; b) $P(> 6) = 4/10 = 2/5$; c) $P(\text{par}) = 5/10 = 1/2$.

T12.20 $P(\text{verde}) = 30/80 = 3/8$.